

Cubes et boules en grandes dimensions

Marc Lorenzi

13 juin 2025

1 Introduction

L'aire d'un carré de côté $2r$ est égale à $4r^2$ et l'aire d'un disque de rayon R est πR^2 . Le périmètre de ce même carré est $8r$ et le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$. En passant à la dimension 3, nous obtenons des résultats tout aussi connus :

- Le volume d'un cube de côté $2r$ est $8r^3$ et l'aire du bord du cube est $24r^2$.
- Le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$ et l'aire d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$.

Que deviennent ces volumes et ces aires en dimensions supérieures ? Nous allons dans cet article nous intéresser au cas facile des cubes en dimension n . Nous passerons ensuite aux boules. Nous verrons que lorsque n tend vers l'infini, les résultats que nous obtiendrons ne seront pas vraiment conformes à l'intuition que nous pourrions avoir de la « forme » d'un cube ou d'une boule.

Dans ce qui suit, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la distance euclidienne usuelle en posant, pour deux points $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}$$

Pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$ bornée suffisamment régulière, on peut définir le volume de A , que nous noterons $\text{Vol}_n A$. Nous ne soulèverons pas dans cet article de difficultés théoriques sur le concept de volume. Nous parlerons également de la surface de A , qui est le volume du bord de A , ce bord étant vu comme un objet de dimension $n - 1$. Nous noterons $\text{Surf}_n A$ cette surface.

Définition 1. Pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la *surface* de A est le volume de son bord.

L'appellation « surface » n'est pas standard, mais elle nous évitera de dire constamment « volume du bord de ».

2 Le cube en dimension n

Définition 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, le *cube* de $\mathbb{R}^n$ de rayon r (et de centre O) est

$$C(n, r) = [-r, r]^n$$

Le cas $n = 0$ est un peu à part : $C(0, r) = \{0\}$. Pour $n = 1$, $C(1, r)$ est le segment $[-r, r]$. Pour $n = 2$, il s'agit d'un carré. Pour $n = 3$, c'est un cube classique.

Dans toute la suite, r désigne un réel strictement positif.

Remarque. Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, le cube de centre a et de rayon r est

$$\prod_{i=1}^n [a_i - r, a_i + r]$$

Ce cube est l'image de $C(n, r)$ par la translation de vecteur a .

2.1 Le volume de $C(n, r)$

Par définition même de la notion de volume, on a la formule suivante.

Proposition 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Vol}_n C(n, r) = (2r)^n$.*

Notons que le « volume » de $C(1, r)$ est la longueur du segment $[-r, r]$. En dimension 2, $\text{Vol}_2 C(2, r)$ est la surface du carré de rayon r . Le lecteur pourrait émettre des doutes sur le volume de $C(0, r) = \mathbb{R}^0$, le « cube en dimension zéro ». Prenons donc $\text{Vol}_0 C(0, r) = 1$ comme une convention. Remarquons que

- Si $r < \frac{1}{2}$, $\text{Vol}_n C(n, r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- Si $r > \frac{1}{2}$, $\text{Vol}_n C(n, r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Vol}_n C(n, \frac{1}{2}) = 1$.

2.2 La surface de $C(n, r)$

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Le point x est *adhérent* à A lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) \leq \varepsilon$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A . L'ensemble $\overline{A}$ est *l'adhérence* de A .

Définition 3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Le *bord* de A est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ qui sont adhérents à la fois à A et au complémentaire de A :

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$$

Pour des ensembles A suffisamment réguliers, cette notion correspond à la notion intuitive que l'on peut avoir du bord d'un objet. Remarquons aussi le cas très particulier $n = 0$. Dans ce cas $A = \emptyset$ ou $A = \{0\}$. Si $A = \emptyset$, alors $\overline{A} = \emptyset$. Si $A = \{0\}$, alors $\mathbb{R}^0 \setminus A = \emptyset$ et donc $\overline{\mathbb{R}^0 \setminus A} = \emptyset$. Dans tous les cas $\partial A = \emptyset$.

Le bord d'un segment est un ensemble de deux points, ses extrémités. Le bord d'un carré est la réunion de 4 segments. Le bord d'un cube en dimension 3 est la réunion de 6 carrés. Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, le bord de $C(n, r)$ est la réunion de $2n$ cubes inclus dans des hyperplans affines de $\mathbb{R}^n$. Posons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$C_{i,\varepsilon} = \{(x_1, \dots, x_n) \in C(n, r), x_i = \varepsilon r\}$$

Le bord de $C(n, r)$ est alors

$$\partial C(n, r) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\varepsilon=\pm 1} C_{i,\varepsilon}$$

Proposition 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Surf}_n C(n, r) = 2n(2r)^{n-1}$.*

Démonstration. Immédiate. Le cas $n = 0$ est un peu osé, mais le bord de $C(0, r)$ est vide, donc la formule fonctionne : $\text{Surf}_0 C(0, r)$ est bien égal à 0. $\square$

Notons que

- Si $r \geq \frac{1}{2}$, $\text{Surf}_n C(n, r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.
- Si $r < \frac{1}{2}$, $\text{Surf}_n C(n, r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Remarquons le cas $r = \frac{1}{2}$: le volume du cube est égal à 1 alors que sa surface tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

2.3 Concentration du volume au bord du cube

Voici notre premier résultat contre-intuitif : en grandes dimensions, la quasi-totalité du volume du cube est concentrée au voisinage de son bord.

Soit $\varepsilon \in]0, r[$. Considérons

$$K(n, r, \varepsilon) = C(n, r) \setminus C(n, r - \varepsilon)$$

L'ensemble $K(n, r, \varepsilon)$ est la « coquille d'épaisseur ε » au bord du cube $C(n, r)$. On a

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n K(n, r, \varepsilon) &= (2r)^n - (2r - 2\varepsilon)^n \\ &= (2r)^n \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r} \right)^n \right) \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r} \right)^n \right) \text{Vol}_n C(n, r) \end{aligned}$$

Le quotient $\text{Vol}_n K(n, r, \varepsilon) / \text{Vol}_n C(n, r)$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini : tout le volume du cube est donc concentré au voisinage de son bord. On peut même aller un peu plus loin en faisant dépendre ε de n . Posons $\varepsilon = \lambda r / n$ où $\lambda > 0$. On a alors

$$1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r} \right)^n = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - e^{-\lambda}$$

Quelle est la signification de ceci ? Cherchons par exemple où se trouve concentrée asymptotiquement la moitié du volume du cube lorsque n tend vers l'infini. Il suffit pour cela de choisir λ tel que $1 - e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$, c'est à dire $\lambda = \ln 2$. La moitié du volume du cube $C(n, r)$ est concentrée dans la très fine coquille d'épaisseur $r \ln 2 / n$.

2.4 La surface s'obtient comme une limite de volumes

Posons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r} \right)^n \right)$$

Un développement limité en ε donne

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - 1 + n \frac{\varepsilon}{r} + o(\varepsilon) \right) = \frac{n}{r} + o(1)$$

Lorsque ε tend vers 0,

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{Vol}_n K(n, r, \varepsilon) \longrightarrow \frac{n}{r} \text{Vol}_n C(n, r)$$

Remarquons que

$$\frac{n}{r} \text{Vol}_n C(n, r) = \frac{n}{r} (2r)^n = 2n(2r)^{n-1} = \text{Surf}_n C(n, r)$$

On a donc la propriété ci-dessous.

Proposition 3.

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{Vol}_n K(n, r, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Surf}_n C(n, r)$$

La quantité de gauche est le volume de la coquille $K(n, r, \varepsilon)$, divisé par l'épaisseur de cette coquille.

2.5 Une résultat probabiliste

Définition 4. Soit $h > 0$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. La *tranche* de $\mathbb{R}^n$ parallèle à H et d'épaisseur $2h$ est l'ensemble

$$T_n(H, h) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, H) \leq h\}$$

Donnons-nous une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$ et suivant une loi uniforme sur $[-r, r]$. Pour tout ensemble $A \subseteq C(n, r)$, le volume de A est donné par une probabilité :

$$\text{Vol}_n A = \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A) \text{Vol}_n C(n, r)$$

La *diagonale principale* du cube $C(n, r)$ est le segment d'extrémités $(-r, \dots, -r)$ et $(r, \dots, r)$. La distance de O à l'une des extrémités de cette diagonale est

$$\ell_n = r\sqrt{n}$$

Notons

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$$

Le vecteur e_n est un vecteur unitaire de la diagonale de $C(n, r)$.

Pour tout $n \geq 1$, soit

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Par la loi faible des grands nombres, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Z_n| \leq r\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Or, cette probabilité est aussi

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A_n(\varepsilon))$$

où $A_n(\varepsilon) \subseteq C(n, r)$ défini par

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in C(n, r) : |x_1 + \dots + x_n| \leq nr\varepsilon\}$$

Soit H_n l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à e_n :

$$(H_n) \quad \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, la distance d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ à l'hyperplan H_n est

$$d(x, H_n) = | \langle x, e_n \rangle | = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$$

Ainsi,

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in C(n, r) : d(x, H_n) \leq \varepsilon \ell_n\} = C(n, r) \cap T_n(H, \varepsilon \ell_n)$$

L'ensemble $A_n(\varepsilon)$ est l'intersection de $C(n, r)$ est de la tranche de $\mathbb{R}^n$ parallèle à H_n , d'épaisseur $2\varepsilon \ell_n$. Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

Proposition 4.

$$\frac{\text{Vol}_n(C(n, r) \cap T_n(H_n, \varepsilon \ell_n))}{\text{Vol}_n C(n, r)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Dit autrement, la quasi-totalité du volume de $C(n, r)$ est concentrée dans la tranche $T_n(H_n, \varepsilon \ell_n)$. Remarquons que H_n n'est pas n'importe quel hyperplan ! Si nous prenons, par exemple, l'hyperplan horizontal H'_n d'équation $x_n = 0$, on a pour tout $\varepsilon \in]0, r]$,

$$C(n, r) \cap T_n(H'_n, \varepsilon) = [-r, r]^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$$

et donc

$$\text{Vol}_n(C(n, r) \cap T_n(H'_n, \varepsilon)) = 2\varepsilon(2r)^{n-1}$$

De là,

$$\frac{\text{Vol}_n(C(n, r) \cap T_n(H'_n, \varepsilon))}{\text{Vol}_n C(n, r)} = \frac{\varepsilon}{r}$$

Cette quantité ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

En revanche, dans la section suivante, nous verrons que pour les boules, la quasi-totalité du volume de la boule est concentrée dans *n'importe quelle tranche*.

3 La boule en dimension n

Dans toute la suite R désigne un réel strictement positif.

Définition 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la *boule fermée de centre O et de rayon R* est

$$B(n, R) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(O, x) \leq R\}$$

Remarquons le cas particulier des dimensions 0 et 1 : $B(0, R) = \{0\}$ et $B(1, R) = [-R, R]$.

3.1 Le volume de $B(n, R)$

On a $\text{Vol}_0 B(0, R) = 1$ et $\text{Vol}_1 B(1, R) = 2R$. Plus généralement, on obtient le volume de la boule au moyen d'une intégrale multiple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{Vol}_n B(n, R) = \int \dots \int_{B(n, R)} dx_1 \dots dx_n$$

Proposition 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Vol}_n B(n, R) = \text{Vol}_n B(n, 1) \times R^n$.

Démonstration. Le cas $n = 0$ est évident. Prenons donc $n \geq 1$. On effectue le changement de variable $(x_1, \dots, x_n) = R(t_1, \dots, t_n)$, qui est l'homothétie de centre O et de rapport R . On a alors

$$\text{Vol}_n B(n, R) = \int_{B(n, 1)} R^n dt_1 \dots dt_n = R^n \text{Vol}_n B(n, 1)$$

□

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

W_n est la n^e intégrale de Wallis.

Proposition 6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Vol}_n B(n, 1) = 2W_n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1)$*

Démonstration. C'est immédiat si $n = 1$. En effet, $W_1 = 1$, $\text{Vol}_1 B(1, 1) = 2$ et $\text{Vol}_0 B(0, 1) = 1$. Prenons donc $n \geq 2$. Remarquons que $(x_1, \dots, x_n) \in B(n, R)$ si et seulement si

$$-R \leq x_n \leq R \text{ et } x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq R^2 - x_n^2$$

Ceci peut encore s'écrire

$$-R \leq x_n \leq R \text{ et } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B(n-1, \sqrt{R^2 - x_n^2})$$

Ainsi,

$$B(n, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \in [-R, R] \text{ et } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B(n-1, \sqrt{R^2 - x_n^2})\}$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n B(n, R) &= \int_{-R}^R \left[\int_{B(n-1, \sqrt{R^2 - x_n^2})} dx_1 \dots dx_{n-1} \right] dx_n \\ &= \int_{-R}^R \text{Vol}_{n-1} B(n-1, \sqrt{R^2 - x_n^2}) dx_n \end{aligned}$$

Par la proposition 5, on a donc

$$\text{Vol}_n B(n, R) = \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x_n^2}^{n-1} dx_n$$

Dans l'intégrale ci-dessus, posons $x_n = R \sin t$. Il vient

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n B(n, R) &= \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^n \cos^n t dt \\ &= 2R^n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \end{aligned}$$

ou encore

$$R^n \text{Vol}_n B(n, 1) = 2R^n W_n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1)$$

d'où le résultat en divisant par R^n . $\square$

Proposition 7. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\text{Vol}_n B(n, 1) = 2^n \prod_{k=1}^n W_k$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n . Tout d'abord, $\text{Vol}_1 B(1, 1) = 2$ et $W_1 = 1$, l'égalité est donc vérifiée si $n = 1$. Soit $n \geq 2$. Supposons l'égalité vérifiée pour $n - 1$. On a alors

$$\text{Vol}_n B(n, 1) = 2W_n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) = 2W_n \times 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} W_k = 2^n \prod_{k=1}^n W_k$$

□

Nous allons admettre quelques propriétés bien connues des intégrales de Wallis. Une intégration par parties permet de montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

Grâce à cette égalité on démontre par récurrence sur p que pour tout entier naturel p ,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2}$$

et

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!}$$

On en déduit alors que

$$W_{2p} W_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)}$$

La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, tend vers 0, et on possède un équivalent de son terme général lorsque n tend vers l'infini :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Proposition 8. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\text{Vol}_{2p+1}B(2p+1, R) &= \frac{2^{2p+1}\pi^p p!}{(2p+1)!} R^{2p+1} \\ \text{Vol}_{2p}B(2p, R) &= \frac{\pi^p}{p!} R^{2p}\end{aligned}$$

Démonstration. Par la proposition 5, il suffit de faire la preuve pour $R = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$. En tenant compte de ce que $W_1 = 1$, on a

$$\begin{aligned}\text{Vol}_{2p+1}B(2p+1, 1) &= 2^{2p+1} \prod_{k=2}^{2p+1} W_k \\ &= 2^{2p+1} \prod_{k=1}^p W_{2k} W_{2k+1} \\ &= 2^{2p+1} \prod_{k=1}^p \frac{\pi}{2(2k+1)} \\ &= 2^{2p+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{1}{3.5 \dots (2p+1)} \\ &= 2^{2p+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{2^p p!}{(2p+1)!} \\ &= \frac{2^{2p+1}\pi^p p!}{(2p+1)!}\end{aligned}$$

Passons aux entiers pairs. L'égalité est vérifiée pour $p = 0$. Soit $p \geq 1$. Par la proposition 6,

$$\begin{aligned}\text{Vol}_{2p}B(2p, 1) &= \frac{\text{Vol}_{2p+1}B(2p+1, 1)}{2W_{2p+1}} \\ &= \frac{2^{2p+1}\pi^p p! (2p+1)!}{(2p+1)! 2^{2p+1} p!^2} \\ &= \frac{\pi^p}{p!}\end{aligned}$$

□

n	0	1	2	3	4
$\text{Vol}_n B(n, R)$	1	$2R$	πR^2	$\frac{4}{3}\pi R^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 R^4$
n	5	6	7	8	9
$\text{Vol}_n B(n, R)$	$\frac{8}{15}\pi^2 R^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 R^6$	$\frac{16}{105}\pi^3 R^7$	$\frac{1}{24}\pi^4 R^8$	$\frac{32}{945}\pi^4 R^9$

FIGURE 1 – Quelques valeurs de $\text{Vol}_n B(n, R)$

Proposition 9.

$$\text{Vol}_n B(n, R) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2\pi e}{n} \right)^{\frac{n}{2}} R^n$$

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour $R = 1$. Prenons tout d'abord n pair. Par la formule de Stirling,

$$\text{Vol}_n B(n, 1) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} \sim \frac{\pi^{n/2} e^{n/2}}{(n/2)^{n/2} \sqrt{\pi n}}$$

ce qui est, en regroupant les facteurs, le résultat attendu.

Prenons maintenant n impair. On a

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n B(n, 1) &= 2W_n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \\ &\sim 2\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \left(\frac{2\pi e}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n e}} \left(\frac{2\pi e}{n-1} \right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$(n-1)^{\frac{n}{2}} = n^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{e}} n^{\frac{n}{2}}$$

d'où le résultat. $\square$

Corollaire 10. *Lorsque n tend vers l'infini, $\text{Vol}_n B(n, R)$ tend vers 0.*

Démonstration. C'est immédiat à partir de l'équivalent de $\text{Vol}_n B(n, R)$. $\square$

Le volume de $B(n, R)$ tend donc vers 0, ceci *quel que soit* R .

Exemple. En dimension $n = 100$, le volume d'une boule ayant un rayon de 1 mètre est égal à $2.37 \times 10^{-40} \text{m}^{100}$.

Exemple. En dimension 999, le volume de la boule unité est de l'ordre de 10^{-884} .

Exemple. En dimension 9999, le volume de la boule unité est de l'ordre de 10^{-13838} .

Voici un graphique montrant $\text{Vol}_n B(n, 1)$ en fonction de n . On a pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, 1)}{\text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1)} = 2W_n$$

Or, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, $2W_5 = \frac{16}{15} > 1$ et $2W_6 = \frac{10\pi}{32} < 1$. Ainsi, $\text{Vol}_n B(n, 1)$ croît jusqu'à $n = 5$ puis décroît strictement. Le maximum est atteint en $\text{Vol}_5 B(5, 1) = \frac{8}{15}\pi^2$.

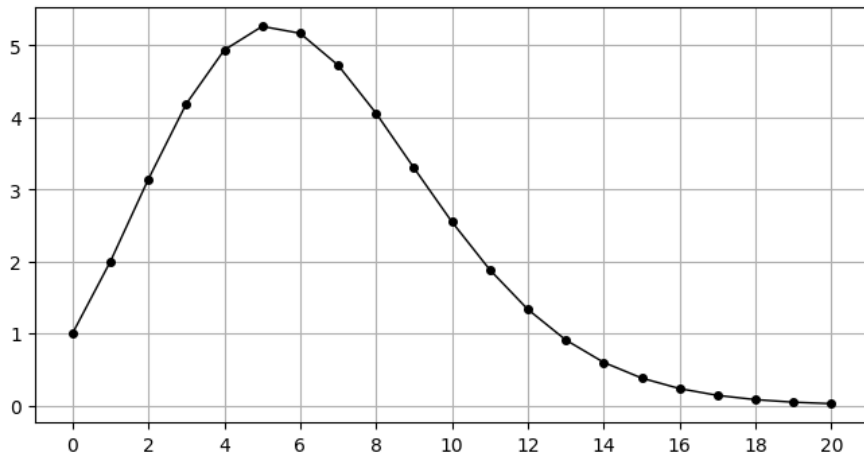


FIGURE 2 – Le volume de la boule unité en fonction de n

3.2 La boule et le cube circonscrit

Le cube *circonscrit* à la boule $B(n, R)$ est le cube $C(n, R)$. Voici, en fonction de n ,

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2R)^n} = \frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{\text{Vol}_n C(n, R)}$$

Remarquons que ce quotient ne dépend pas de R .

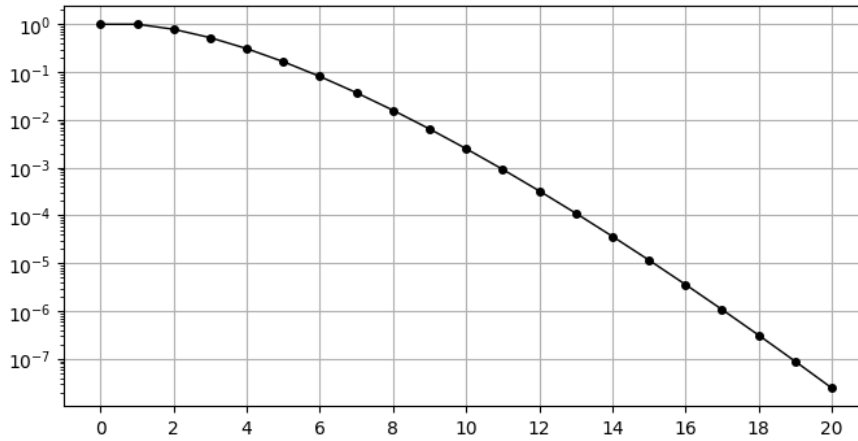


FIGURE 3 – Le quotient du volume de la boule et du volume du cube circonscrit

Proposition 11.

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2R)^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{\pi e}{2n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 9. $\square$

Corollaire 12.

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2R)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi, le volume de la boule est *négligeable* devant le volume du cube circonscrit ...

3.3 La boule et le cube inscrit

Comparons maintenant le volume de la boule de rayon R avec celui du cube *inscrit* dans la boule, c'est à dire le cube $C(n, r)$ dont les sommets sont sur le bord de la boule. L'un des 2^n sommets de ce cube est $(r, \dots, r)$. En reportant dans l'égalité $x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2$, il vient

$$r = \frac{R}{\sqrt{n}}$$

Le cube en question a donc pour volume

$$(2r)^n = \frac{(2R)^n}{n^{\frac{n}{2}}}$$

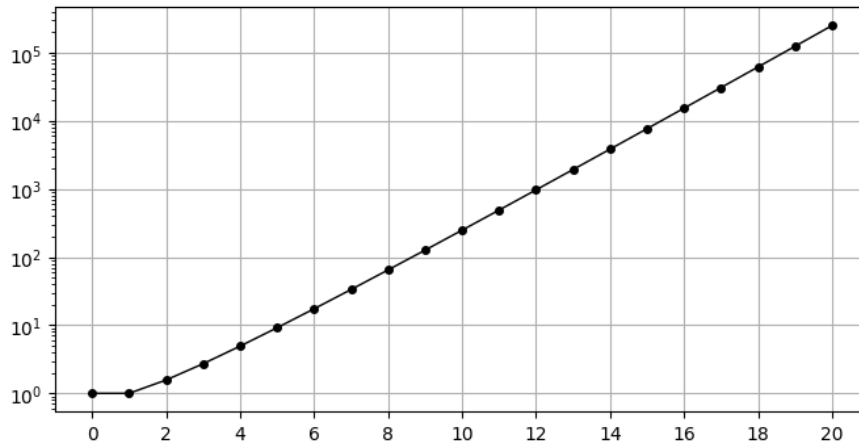


FIGURE 4 – Le quotient du volume de la boule et du volume du cube inscrit

Proposition 13.

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2r)^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (\pi e)^{\frac{n}{2}}$$

Corollaire 14.

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2r)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Et donc, le volume du cube inscrit est négligeable devant le volume de la boule ...

3.4 Concentration du volume au bord de la boule

Soit $0 < \varepsilon < R$. On a

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R - \varepsilon)}{\text{Vol}_n B(n, R)} = \frac{(R - \varepsilon)^n}{R^n} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^n$$

Le quotient des volumes tend donc vers 1 lorsque n tend vers l'infini. On peut aussi, comme ce qui a été fait pour le cube, faire dépendre ε de n en posant $\varepsilon = \frac{\lambda R}{n}$. On a alors

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R - \varepsilon)}{\text{Vol}_n B(n, R)} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$$

On retrouve les résultats déjà vus pour le cube : le volume de la boule $B(n, R)$ se concentre au voisinage du bord de la boule.

3.5 Concentration du volume dans les hyperplans

Découpons dans la boule $B(n, R)$ une fine tranche horizontale contenant le point O . On imagine que le volume de cette tranche sera petit par rapport au volume de la boule. En fait il n'en est rien. En grandes dimensions, *la tranche en question contiendra la quasi-totalité du volume de la boule.*

Soit $0 < \varepsilon < R$. Évaluons le volume de l'intersection de la boule $B(n, R)$ avec la tranche $-\varepsilon \leq x_n \leq \varepsilon$ comprise entre les deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$ d'équations $x_n = \pm \varepsilon$. Notons ce volume $K(n, R, \varepsilon)$. Reprenant le calcul du volume de la boule, on obtient

$$K(n, R, \varepsilon) = R^n K(n, 1, \frac{\varepsilon}{R}) = 2R^n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \int_0^\theta \cos^n t \, dt$$

où $\theta = \arcsin \frac{\varepsilon}{R}$ vérifie $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. On a

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \leq \frac{\pi}{2} \cos^n \theta = o(W_n)$$

puisque $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Ainsi,

$$W_n = \int_0^\theta \cos^n t \, dt + o(W_n)$$

et donc

$$K(n, R, \varepsilon) \sim 2R^n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) W_n = \text{Vol}_n B(n, R)$$

Dit autrement,

$$\frac{K(n, R, \varepsilon)}{\text{Vol}_n B(n, R)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Le volume de la boule unité est concentré dans une tranche d'épaisseur 2ε autour de l'hyperplan H_n d'équation $x_n = 0$.

Cette propriété est remarquable en elle-même, mais il y a mieux : soit H un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Il existe une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ qui envoie H sur l'hyperplan H_n . Cette isométrie envoie alors la bande d'épaisseur 2ε autour de H_n sur la tranche d'épaisseur 2ε autour de H . Comme la boule est invariante par les isométries vectorielles, le résultat précédent reste valable :

Proposition 15. *Le volume de la boule $B(n, R)$ est concentré dans la tranche d'épaisseur 2ε centrée en n'importe quel hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^n$.*

3.6 Surface du bord la boule

Terminons cette article en parlant, comme nous l'avons fait pour les cubes, du bord de la boule.

Donnons nous un réel $\varepsilon > 0$ et considérons le volume compris entre les boules $B(n, R - \varepsilon)$ et $B(n, R)$. Ce volume est

$$\begin{aligned} L(n, R, \varepsilon) &= \text{Vol}_n B(n, R) - \text{Vol}_n B(n, R - \varepsilon) \\ &= \text{Vol}_n B(n, R) \left(1 - \frac{\text{Vol}_n B(n, R - \varepsilon)}{\text{Vol}_n B(n, R)} \right) \end{aligned}$$

Le calcul a déjà été fait un peu plus haut :

$$L(n, R, \varepsilon) = \text{Vol}_n B(n, R) \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \right)^n \right)$$

Lorsque ε tend vers 0, on a donc

$$L(n, R, \varepsilon) \sim \text{Vol}_n B(n, R) \frac{n\varepsilon}{R}$$

Le bord de la boule $B(n, R)$ est la *sphère* de centre O et de rayon R :

$$\partial B(n, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(O, x) = R\}$$

Cette sphère est une *variété* de dimension $n - 1$. Il est possible de définir son volume, que nous appellerons la surface de la boule. Admettons ici le résultat que nous avons démontré pour les cubes : la surface de la boule est la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de $\frac{1}{\varepsilon}L(n, R, \varepsilon)$. On a donc

$$\text{Surf}_n B(n, R) = \frac{n}{R} \text{Vol}_n B(n, R)$$

n	0	1	2	3	4
$\mathcal{S}(n, R)$	—	2	$2\pi R$	$4\pi R^2$	$2\pi^2 R^3$
n	5	6	7	8	9
$\mathcal{S}(n, R)$	$\frac{8}{3}\pi^2 R^4$	$\pi^3 R^5$	$\frac{16}{15}\pi^3 R^6$	$\frac{1}{3}\pi^4 R^7$	$\frac{32}{105}\pi^4 R^8$

FIGURE 5 – Quelques valeurs de $\text{Surf}_n B(n, R)$

L'équivalent de $\text{Vol}_n B(n, R)$ donné par la proposition 9 nous donne immédiatement un équivalent de $\text{Surf}_n B(n, R)$.

Proposition 16.

$$\text{Surf}_n B(n, R) \sim \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n} \right)^{\frac{n}{2}} R^{n-1}$$

Sans surprise (?), $\text{Surf}_n B(n, R)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.