Quelques sommes relatives au triangle de Pascal

Marc Lorenzi

11 septembre 2025

Introduction

Voici le triangle de Pascal (enfin, une partie de celui-ci). À la ligne n et à la colonne k, on trouve $\binom{n}{k}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	0	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	0	0	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	0	0	0
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	0	0
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	0
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Il y a 4 façons « simples » d'additionner des coefficients binomiaux.

- Sommer sur une ligne.
- Sommer sur une colonne, en s'arrêtant à une ligne donnée.
- Sommer sur une diagonale « descendante », en s'arrêtant à une ligne donnée.
- Sommer sur une diagonale « montante ».

Dans chacun des 4 cas, on obtient un résultat intéressant.

Lignes

La première possibilité est la plus connue. La somme des nombres en rouge sur la ligne 7 est égale à $128 = 2^7$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Proposition 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration. Par la formule du binôme,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

□

Colonnes

La somme des coefficients de la colonne 4, jusqu'à la ligne 9, est égale à 252, qui est justement $\binom{10}{5}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Exercice. Avant de tourner la page, deviner quelle proposition nous allons énoncer, puis démontrer, à la page suivante.

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=?}^{?} \binom{?}{?} =?$$

Proposition 2. *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$\boxed{0}$ Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{j}{k} = \binom{0}{k}$$

Si $k = 0$, cette quantité vaut 1. Sinon, elle vaut 0. Il en est de même pour $\binom{1}{k+1}$.

$\boxed{n \to n+1}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n+1} \binom{j}{k} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} + \binom{n+1}{k} \\
&= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \\
&= +\binom{n+2}{k+1}
\end{aligned}$$

□

Diagonales descendantes

Que se passe-t-il lorsqu'on somme des coefficients binomiaux sur une diagonale descendante ? La somme des coefficients en rouge ci-dessous est égale à $210 = \binom{10}{6}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=?}^{?} \binom{?}{?} = ?$$

Proposition 3. *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

$\boxed{0}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{n+j}{j} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$$

$\boxed{k \to k+1}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+1}{k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} + \binom{n+k+1}{k+1} \\
&= \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} \\
&= \binom{n+k+2}{k+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Diagonales montantes

Terminons par les diagonales montantes. C'est là que l'on obtient le résultat le moins intuitif. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la *suite de Fibonacci* définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Voici les premiers termes de la suite de Fibonacci.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Nous allons montrer qu'en sommant les diagonales montantes du triangle de Pascal, on obtient les termes de la suite de Fibonacci. Par exemple, la somme des 13 nombres de la diagonale montante numéro 12 est

$$\begin{aligned} & \binom{12}{0} + \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{2}{10} + \binom{1}{11} + \binom{0}{12} \\ = \; & 1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ = \; & 233 \\ = \; & F_{13} \end{aligned}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=?}^{?} \binom{?}{?} =?$$

Proposition 4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

Démonstration. Montrons ce résultat par une récurrence à deux termes sur n.

$\boxed{0}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{n-k}{k} = \binom{0}{0} = 1 = F_1$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n-k}{k} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 = F_2.$

$\boxed{n, n+1 \to n+2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$(H_n) \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

$$(H_{n+1}) \ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} = F_{n+4}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} + 0 \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \\
&= 1 + S_1 + S_2
\end{aligned}$$

Dans S_1, posons $j = k-1$. Par H_n,

$$S_1 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j}{j} = F_{n+1}$$

Par ailleurs, par H_{n+1},

$$S_2 = F_{n+2} - \binom{n+1}{0} = F_{n+2} - 1$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} = 1 + F_{n+1} + (F_{n+2} - 1) = F_{n+3}$$

□