Nombres de Fubini

Marc Lorenzi

16 mai 2026

1 Une famille de séries

Proposition 1.0.1. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série de terme général $n^p 2^{-n}$ est convergente.*

Démonstration. Cette série est à termes positifs. Lorsque n tend vers l'infini, $n^{p+2} = o(2^n)$. Pour tout n assez grand, on a donc $n^{p+2} \leq 2^n$, d'où $n^p 2^{-n} \leq 1/n^2$, terme général d'une série de Riemann convergente. $\square$

Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

La suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite numéro $A076726$ de l'Encyclopédie en ligne des suites d'entiers (OEIS), à l'adresse `https://oeis.org/A076726`.

Proposition 1.0.2. $S_0 = 2$ *et pour tout* $p \geq 1$,

$$S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k$$

Démonstration. S_0 est la somme d'une série géométrique de raison $1/2$:

$$S_0 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Soit $p \geq 1$. On a $0^p/2^0 = 0$ et donc

$$S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

Faisons le changement d'indice $n = n' + 1$.

$$S_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^p}{2^n}$$

En développant $(n+1)^p$ avec la formule du binôme,

$$S_p = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n^k}{2^n}$$

Par linéarité de la somme,

$$S_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_k$$

d'où le résultat. $\square$

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_p	2	2	6	26	150	1082	9366	94586	1091670	14174522	204495126

Figure 1 – Les premières valeurs de S_p

$$S_{666} = \begin{array}{l}
1492830682528316188605692312528532453382442398665449452950367616299791 \\
5323299141338738501379627762175853044157636786867695784881022301971263 \\
6587013885466403099089351954385198966943079810985595013804162158522928 \\
4175142203091112109348125482719302316698512149848702807148973011671785 \\
3095498419931622041290239441209224093752263958445632895639811594139861 \\
1387106992992843581512501192966052633500894721579534421711185176671884 \\
0056979934552166062151907801008867008330597222979874323501591992171248 \\
4475049402988485929497344541861714166653415805788917270308590099044517 \\
7525573131063315706364887331670683782136895467527310424229156633855724 \\
9527584443884158306960572308060373637149223221069255731114197771174218 \\
8003059267880629361267599622328573181322489490092633617807565580878813 \\
9527598002604876501048518313201145610806228583732842688910890054628608 \\
0291807956666953553908943367858422939086723708633690969568640724968914 \\
9728987699597032427489248126152669554388621005964024372756325646331953 \\
3705273827402745038882319959251584981904146460761780038827064258400849 \\
2569148766590490611361360997189383148943003539913106583799554681384864 \\
2687580396933735952739094108807275698490286191186299738035450268734949 \\
4791219796423861738223275419365039619212873247593270138476218876629045 \\
4485680904742519517178325620885340992279343451641502000544246318148846 \\
9516398275302954267569100317082161876433302865598375849167566861679523 \\
5215781416782627539325780785363551872788920007935732050095375403423773 \\
1154590646040212375853926335047090648708601450186440290558968271400989 \\
3770266766373865981955676769965438717471896261100040064852037587396875 \\
9478098456238989965950049946000933559113463013462925450691059260443411 \\
33740424133748479766
\end{array}$$

Figure 2 – La valeur de S_{666}

2 Une interprétation combinatoire

Peut-on obtenir une expression « explicite » de S_p ? Nous allons montrer que l'on peut exprimer S_p à l'aide des *nombres de Stirling de deuxième espèce.*

Théorème 2.0.3. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$S_p = 2 \sum_{k=0}^{p} k! \left\{ {p \atop k} \right\}$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons interpréter $S_p/2$ comme le cardinal d'un ensemble. En calculant ce cardinal, nous obtiendrons la valeur de S_p.

Définition 2.0.1. Soit E un ensemble fini. Une *partition ordonnée* de E est un m-uplet $(A_1, \dots, A_m)$ de parties de E où $m \in \mathbb{N}$ et $\{A_1, \dots, A_m\}$ est une partition « standard » de E.

Notons $\Pi(E)$ l'ensemble des partitions ordonnées de E. Le cardinal de $\Pi(E)$ ne dépend que du cardinal p de E et pas de E. Notons $F_p = |\Pi(E)|$ si $|E| = p$. Les entiers F_p sont appelés les *nombres de Bell ordonnés* ou aussi les *nombres de Fubini.* L'appellation « nombre de Fubini » est liée au *théorème de Fubini* qui permet l'interversion et le regroupement de sommes à l'intérieur de sommes multiples. Par exemple, il y a 13 façons d'écrire une somme triple :

$$\begin{aligned}
\sum_{(a,b,c)\in A\times B\times C} u_{a,b,c} &= \sum_{a\in A} \sum_{(b,c)\in B\times C} u_{a,b,c} = \sum_{b\in B} \sum_{(a,c)\in A\times C} u_{a,b,c} = \sum_{c\in C} \sum_{(a,b)\in A\times B} u_{a,b,c} \\
&= \sum_{(b,c)\in B\times C} \sum_{a\in A} u_{a,b,c} = \sum_{(a,c)\in A\times C} \sum_{b\in B} u_{a,b,c} = \sum_{(a,b)\in A\times B} \sum_{c\in C} u_{a,b,c} \\
&= \sum_{a\in A} \sum_{b\in B} \sum_{c\in C} u_{a,b,c} = \sum_{a\in A} \sum_{c\in C} \sum_{b\in B} u_{a,b,c} = \sum_{b\in B} \sum_{a\in A} \sum_{c\in C} u_{a,b,c} \\
&= \sum_{b\in B} \sum_{c\in C} \sum_{a\in A} u_{a,b,c} = \sum_{c\in C} \sum_{a\in A} \sum_{b\in B} u_{a,b,c} = \sum_{c\in C} \sum_{b\in B} \sum_{a\in A} u_{a,b,c}
\end{aligned}$$

Notons que $2 \times 13 = 26 = S_3$.

Proposition 2.0.4. $F_0 = 1$ *et pour tout* $p \geq 1$,

$$F_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} F_k$$

Démonstration. Soit E un ensemble fini de cardinal 0 (on n'a pas beaucoup le choix, $E = \emptyset$). On a $\Pi(E) = \{()\}$, donc $F_0 = 1$. Soit $p \geq 1$. Soit E un ensemble de cardinal p. Pour tout

$P = (A_1, \dots, A_m) \in \Pi(E)$, soit $\Phi(P) = (A_1, (A_2, \dots, A_m)) \in \mathcal{F}$ où

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{p} \bigcup_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \{A\} \times \Pi(E \setminus A)$$

La fonction Φ est une bijection de $\Pi(E)$ sur $\mathcal{F}$. On a donc (union disjointe)

$$\begin{aligned}
|\Pi(E)| &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} |\{A\} \times \Pi(E \setminus A)| \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} |\Pi(E \setminus A)| \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} F_{p-k} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} F_{p-k}
\end{aligned}$$

Le changement d'indice $k' = p - k$ donne le résultat. □

Proposition 2.0.5. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = 2F_p$.*

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence forte sur p. On a $S_0 = 2$ et $F_0 = 1$. Soit $p \geq 1$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $S_k = 2F_k$. Par les propositions 2 et 4,

$$S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} 2F_k = 2F_p$$

□

Proposition 2.0.6. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$F_p = \sum_{k=0}^{p} k! \left\{ {p \atop k} \right\}$$

Démonstration. Soit E un ensemble fini de cardinal p. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, notons $\Pi_k(E)$ l'ensemble des partitions ordonnées de E de cardinal k et $\Pi'_k(E)$ l'ensemble des partitions « standard » de E de cardinal k. Soit $\Phi : \Pi_k(E) \longrightarrow \Pi'_k(E)$ définie par

$$\Phi((A_1, \dots, A_k)) = \{A_1, \dots, A_k\}$$

L'application Φ est surjective. Plus précisément, pour tout $P = \{A_1, \dots, A_k\} \in \Pi'_k(E)$, $|\Phi^{-1}(P)| = k!$, le nombre de permutations des ensembles distincts (car disjoints et non vides) $A_1, \dots, A_k$. On a

$$\Pi_k(E) = \Phi^{-1}(\Pi'_k(E)) = \bigcup_{P \in \Pi'_k(E)} \Phi^{-1}(\{P\})$$

Cette union est disjointe, donc

$$|\Pi_k(E)| = \sum_{P \in \Pi'_k(E)} |\Phi^{-1}(\{P\})| = k!|\Pi'_k(E)|$$

Or,

$$|\Pi'_k(E)| = \left\{ {p \atop k} \right\}$$

donc

$$|\Pi_k(E)| = k!\left\{ {p \atop k} \right\}$$

Remarquons maintenant que

$$\Pi(E) = \bigcup_{k=0}^{p} \Pi_k(E)$$

Cette union est disjointe, d'où le résultat. $\square$

Les propositions 5 et 6 achèvent la preuve du théorème 3.