Une famille de fonctions

Marc Lorenzi

3 décembre 2025

Pour tout réel α, soit $f_\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$,

$$f_\alpha(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}$$

Les fonctions f_α sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Dans les figures qui vont suivre, on prolonge f_α à $\mathbb{R}$ par imparité. Pourquoi ? parce que c'est plus joli.

1 Le cas $\alpha < 0$

On suppose dans cette section que $\alpha < 0$.

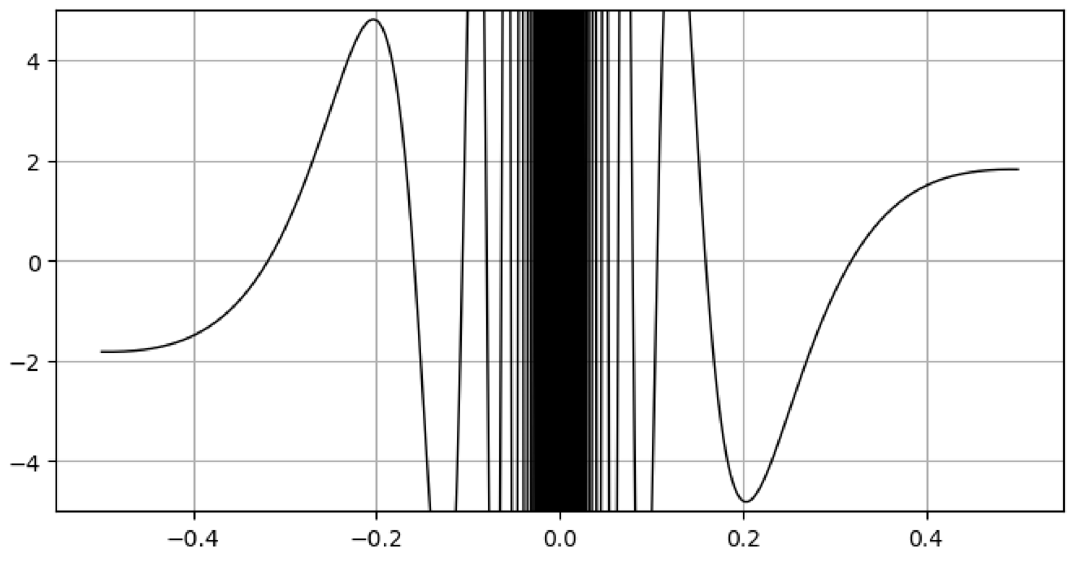

FIGURE 1 – La fonction f_{-1}

Proposition 1. *La fonction f_α n'est bornée dans aucun voisinage de 0.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_\alpha\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-\alpha}$$

Lorsque n tend vers l'infini, cette quantité tend vers $+\infty$. $\square$

Corollaire 2. *Si $\alpha < 0$, la fonction f_α n'est pas continue en 0.*

2 Le cas $\alpha = 0$

Proposition 3. *La fonction f_0 n'a pas de limite en 0.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_0\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

Par caractérisation séquentielle, si f_0 a une limite ℓ en 0, alors $\ell = 1$. On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_0\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$$

Par caractérisation séquentielle, si f_0 a une limite ℓ en 0, alors $\ell = 0$. Comme $0 \neq 1$, f_0 n'a pas de limite en 0. $\square$

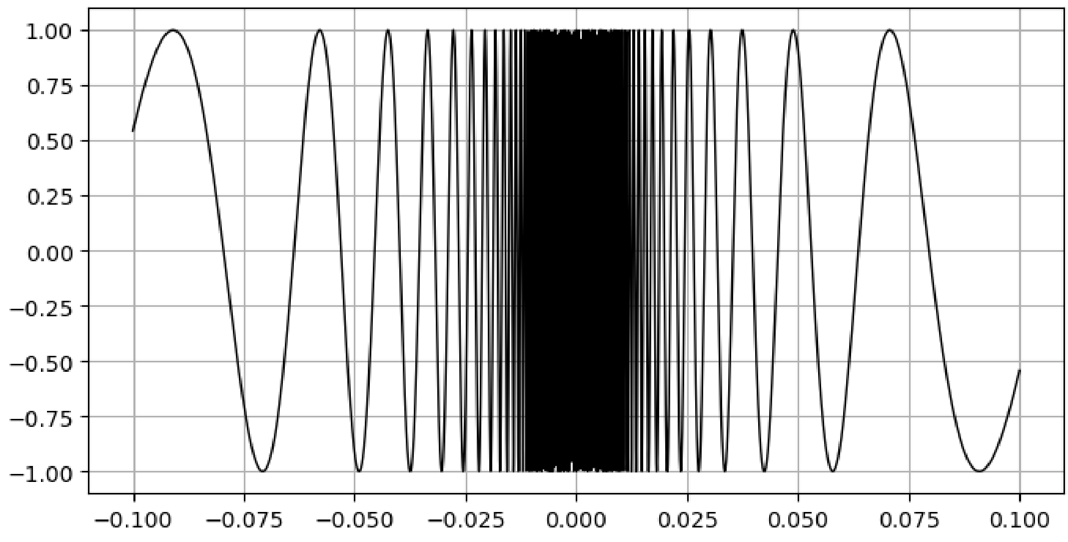

FIGURE 2 – La fonction f_0

Corollaire 4. *f_0 n'est pas continue en 0.*

3 Le cas $\alpha > 0$

On suppose dans cette section que $\alpha > 0$.

3.1 Continuité

Proposition 5. *La fonction f_α est continue en 0.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f_\alpha(x)| \leq |x|^\alpha$$

Lorsque x tend vers 0, $|x|^\alpha$ tend vers 0. Par le théorème de comparaison, $f_\alpha(x)$ tend vers $0 = f_\alpha(0)$ lorsque x tend vers 0. □

3.2 Dérivabilité

Proposition 6. *La fonction f_α est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 1$. De plus, si $\alpha > 1$, $f'_\alpha(0) = 0$.*

Démonstration. Pour tout $x > 0$,

$$\Delta = \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} = f_{\alpha-1}(x)$$

Par l'étude précédente,

- Si $0 < \alpha < 1$, Δ est non borné dans tout voisinage de 0.
- Si $\alpha = 1$, Δ n'a pas de limite en 0.
- Si $\alpha > 1$, Δ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

□

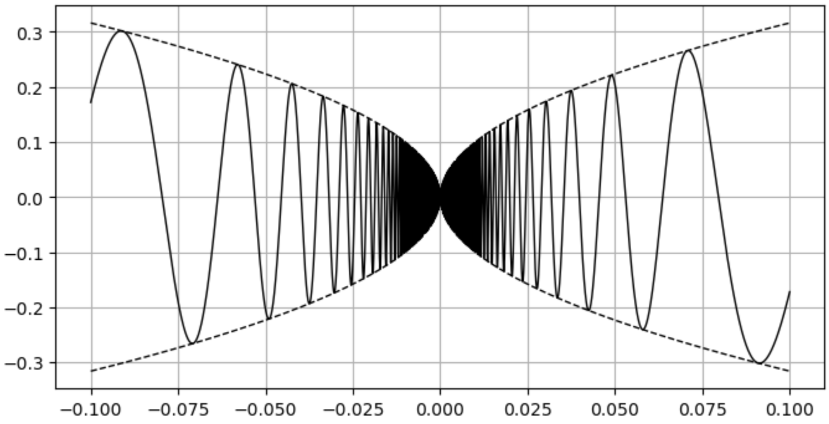

Figure 3 – La fonction $f_{1/2}$

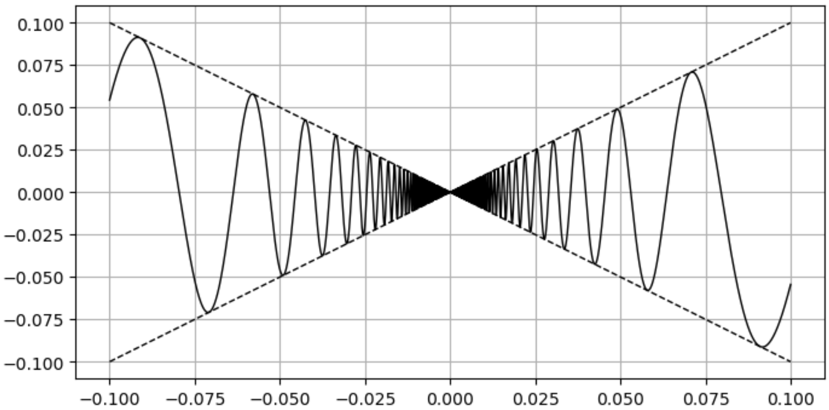

Figure 4 – La fonction f_1

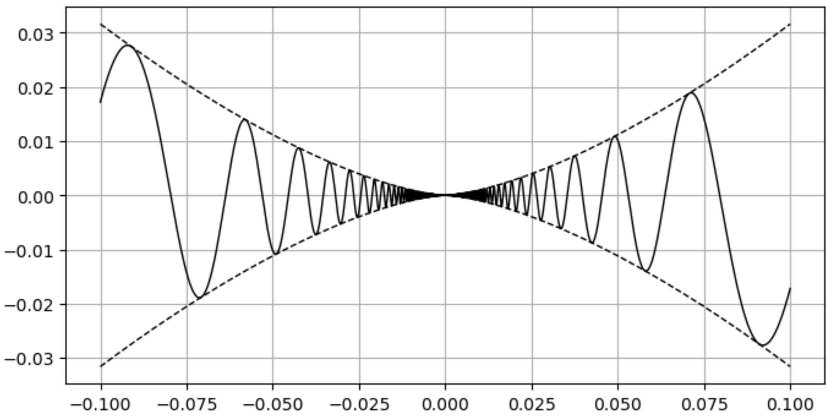

Figure 5 – La fonction $f_{3/2}$

3.3 Classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 7. *La fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $\alpha > 2$.*

Démonstration. Si $\alpha \leq 1$, la fonction f_α n'est pas dérivable en 0. Elle n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons dorénavant $\alpha > 1$.

Pour tout $x > 0$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$$

Le premier terme tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Facilement, le second terme a une limite en 0 si et seulement si $\alpha > 2$, d'où le résultat. $\square$

4 Lipschitz

Proposition 8. *Si $\alpha < 2$, la fonction f_α n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Supposons $\alpha < 2$. Pour tout $n \geq 1$, posons

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$$

On a

$$f_\alpha(x_n) = \frac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})^\alpha} \sim \frac{1}{(2n\pi)^\alpha}$$

$$f_\alpha(y_n) = -\frac{1}{(2n\pi - \frac{\pi}{2})^\alpha} \sim -\frac{1}{(2n\pi)^\alpha}$$

et donc

$$f_\alpha(x_n) - f_\alpha(y_n) \sim \frac{2}{(2n\pi)^\alpha}$$

Également,

$$x_n - y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})(2n\pi - \frac{\pi}{2})} \sim -\frac{\pi}{(2n\pi)^2}$$

De là,

$$\left| \frac{f_\alpha(x_n) - f_\alpha(y_n)}{x_n - y_n} \right| \sim \frac{2}{\pi}(2n\pi)^{2-\alpha}$$

Si $\alpha < 2$, cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini. Les taux d'accroissements de f_α ne sont pas bornés, donc f_α n'est pas lipschitzienne. $\square$

Proposition 9. *Si $\alpha > 2$, la fonction f_α n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Supposons $\alpha > 2$. Cette fois, c'est le comportement de f_α au voisinage de $+\infty$ qui va nous intéresser. Pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{f_\alpha(n) - f_\alpha(0)}{n - 0} = n^{\alpha-1} \sin \frac{1}{n} \sim n^{\alpha-2}$$

Comme $\alpha - 2 > 0$, cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini. Les taux d'accroissements de f_α ne sont pas bornés, donc f_α n'est pas lipschitzienne. □

Lemme 10. *Pour tout réel t, $|\sin t| \leq |t|$.*

Démonstration. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\sin' t| = |\cos t| \leq 1$$

Par l'inégalité des accroissements finis, sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\sin t - \sin 0| \leq |t - 0|$$

□

Proposition 11. *La fonction f_2 est 3-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En utilisant le lemme précédent, on a pour tout $x \neq 0$,

$$|f_2'(x)| = \left|2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right| \leq 2|x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| + \left|\cos \frac{1}{x}\right| \leq 2|x| \frac{1}{|x|} + 1 = 3$$

De plus, $f_2'(0) = 0$. Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, f_2 est 3-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
□

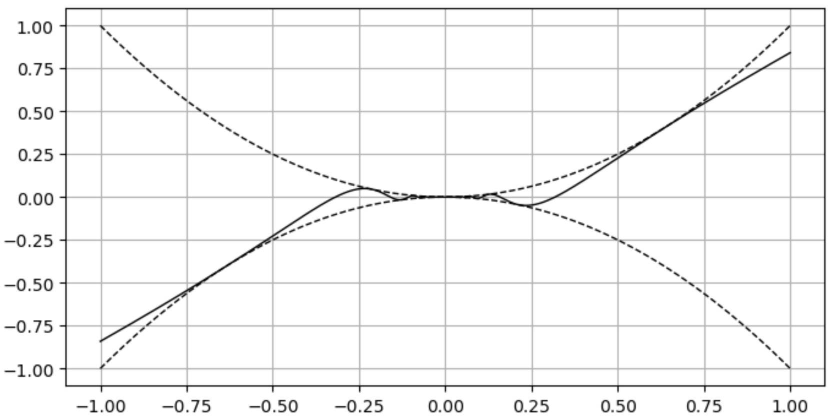

FIGURE 6 – La fonction f_2 sur l'intervalle $[-1, 1]$

5 Classe $\mathcal{D}^2$, classe $\mathcal{C}^2$

Proposition 12. *$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $\alpha > 3$. Si $\alpha > 3$, on a alors $f''_\alpha(0) = 0$.*

Démonstration. Si $\alpha \leq 2$, alors f_α n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, donc f_α n'est pas de classe $\mathcal{D}^2$. Prenons donc $\alpha > 2$. On a pour tout $x > 0$,

$$\frac{f'_\alpha(x) - f'_\alpha(0)}{x - 0} = \alpha x^{\alpha-2} \sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-3}\cos\frac{1}{x}$$

Le premier terme tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Facilement, le second terme a une limite en 0 si et seulement si $\alpha > 3$. Cette limite est alors nulle, d'où le résultat. □

Proposition 13. *$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $\alpha > 4$.*

Démonstration. Si $\alpha \leq 3$, alors f_α n'est pas de classe $\mathcal{D}^2$, donc f_α n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$. Prenons donc $\alpha > 3$. On a pour tout $x > 0$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$$

$$f''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x} - (2\alpha-2)x^{\alpha-3}\cos\frac{1}{x} + x^{\alpha-4}\sin\frac{1}{x}$$

Les deux premiers termes tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Facilement, le dernier terme a une limite en 0 si et seulement si $\alpha > 4$. Cette limite est alors nulle, d'où le résultat. □

6 Bilan

- f_α est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha = 2$.
- $f_\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- $f_\alpha \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- $f_\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $\alpha > 2$.
- $f_\alpha \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $\alpha > 3$.
- $f_\alpha \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $\alpha > 4$.