Deux familles de cercles

Marc Lorenzi

19 novembre 2024

1 Introduction

1.1 La sphère de Riemann

Dans tout l'article, nous identifions le plan $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Nous ajoutons à $\mathbb{C}$ un *point à l'infini* noté ∞ et nous notons

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{C}}$ est la *sphère de Riemann.* Pourquoi une *sphère* ? Nous verrons dans la dernière partie de l'article qu'il existe effectivement une bijection entre $\overline{\mathbb{C}}$ et la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, mais chaque chose en son temps.

1.2 Une homographie

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Considérons l'application $f_a : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ définie par

$$f_a(z) = \frac{z-a}{z+a}$$

en convenant que $f_a(-a) = \infty$ et $f_a(\infty) = 1$. L'application f_a est une *homographie* (ou *transformation de Möbius*). Elle possède une racine, a, et un pôle, $-a$. La figure ci-dessous représente la fonction f_1 dans le carré $[-5, 5] \times [-5, 5]$.

Donnons quelques explications. Sur les cercles (?) sombres, le module de f_1 est constant. Les couleurs décrivent l'argument de f_1. En rouge, $\arg f_1 = 0$. En bleu clair, $\arg f_1 = \pi$. Lorsqu'on tourne autour de la racine a ou du pôle $-a$, l'argument de f_1 parcourt un cycle complet de couleurs. On vérifie facilement que lorsque z tend vers l'infini, $\arg f_1(z)$ tend vers 0, ce qui explique la tonalité rouge de la figure.

Remarque. Notons le point d'interrogation au sujet des cercles. Sur la figure, les courbes noires ressemblent à des cercles, mais en sont-elles vraiment ? Nous verrons bientôt que c'est le cas. Les points d'une couleur donnée sont ceux où l'argument de f_1 est constant. En observant par exemple la couleurs verte ou la couleur bleue, on distingue également des cercles (?) qui semblent passer par les points -1 et 1. Nous en reparlerons aussi.

Proposition 1. *f_a est une bijection.*

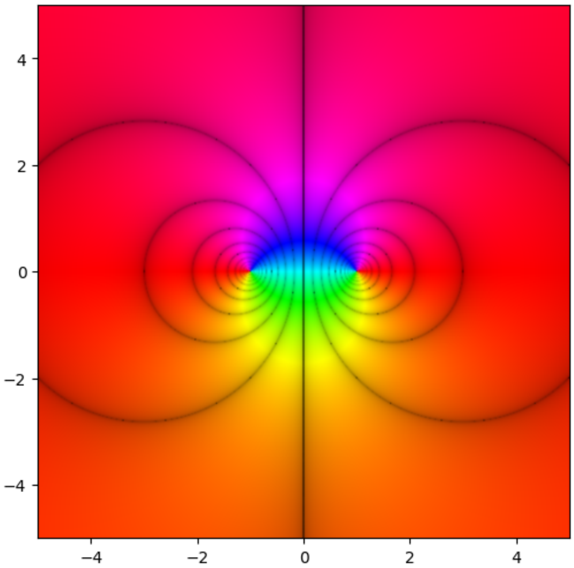

FIGURE 1 – La fonction f_1

Démonstration. Soit $g_a : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ définie pour tout $z \in \overline{\mathbb{C}}$ par

$$g_a(z) = a\frac{1+z}{1-z}$$

avec $g_a(1) = \infty$ et $g_a(\infty) = -a$. On vérifie facilement que $f_a \circ g_a = g_a \circ f_a = id_{\overline{C}}$. Ainsi, f_a est bijective et $f_a^{-1} = g_a$. $\square$

Remarque. Pour tout $z \in \overline{\mathbb{C}}$,

$$f_a(az) = \frac{az-a}{az+a} = \frac{z-1}{z+1} = f_1(z)$$

Ainsi, en appelant s la similitude de centre O et de rapport a, on a

$$f_a \circ s = f_1$$

L'étude de f_a peut ainsi être ramenée à celle de f_1.

2 Les cercles d'Apollonius

2.1 Lignes de niveau de $|f_a|$

Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, posons $k_\theta = \tan(\theta/2)$, en convenant que $k_\pi = \infty$. Notons

$$C_\theta(a) = \{z \in \mathbb{C} : |f_a(z)| = k_\theta\}$$

Remarquons les deux cas particuliers $C_0(a) = \{a\}$ et $C_\pi(a) = \{-a\}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z \in C_\theta(a)$ si et seulement si

$$\left| f_1\left(\frac{z}{a}\right) \right| = k_\theta$$

c'est à dire $z/a \in C_\theta(1)$. Ainsi, $C_\theta(a)$ est l'image de $C_\theta(1)$ par la similitude de centre O et de rapport a. Dans la suite, nous prendrons $a = 1$ et nous noterons $C_\theta = C_\theta(1)$.

2.2 Équation cartésienne

Soit $\theta \in [0, \pi[$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z \in C_\theta$ si et seulement si

$$|z-1|^2 = k_\theta^2 |z+1|^2$$

c'est à dire

$$(z-1)(\overline{z}-1) = k_\theta^2 (z+1)(\overline{z}+1)$$

qui se développe en

$$|z|^2 - (z+\overline{z}) + 1 = k_\theta^2 (|z|^2 + (z+\overline{z}) + 1)$$

Une équation cartésienne de C_θ est ainsi

$$(C_\theta)\ (1-k_\theta^2)|z|^2 - (1+k_\theta^2)(z+\overline{z}) + (1-k_\theta^2) = 0$$

Remarquons que

$$\frac{1-k_\theta^2}{1+k_\theta^2} = \frac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} = \cos\theta$$

En divisant par $1 + k_\theta^2$ et en posant $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient ainsi l'équation

$$\boxed{(C_\theta)\ \cos\theta(x^2+y^2) - 2x + \cos\theta = 0}$$

Remarquons que pour $\theta = \pi$,

$$\cos\theta(x^2+y^2) - 2x + \cos\theta = -(x^2+y^2+2x+1) = -(x+1)^2 - y^2$$

Cette quantité est nulle si et seulement si $x = -1$ et $y = 0$. Ainsi, l'équation cartésienne ci-dessus reste valable pour $\theta = \pi$.

2.3 Symétries

Soit $\theta \in [0, \pi]$. L'équation de C_θ montre que C_θ est invariant par l'application $z \longmapsto \overline{z}$, c'est à dire la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}$. Soit $\theta' = \pi - \theta$. On a $\cos\theta' = -\cos\theta$. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \in C_{\theta'}$ si et seulement si

$$\cos\theta(x^2+y^2) + 2x + \cos\theta = 0$$

c'est à dire $-z \in C_\theta$ (ou aussi $-\overline{z} \in C_\theta$). Ainsi, $C_{\theta'}$ est l'image de C_θ par les applications $z \longmapsto -z$ et $z \longmapsto -\overline{z}$, c'est à dire la symétrie de centre O et la symétrie orthogonale par rapport à $i\mathbb{R}$.

On obtient donc les C_θ pour $\theta \in [\pi/2, \pi]$ à partir des C_θ pour $\theta \in [0, \pi/2]$.

Dans la suite de notre discussion, nous supposerons que $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Nous ferons tout de même quelques remarques sur ce qui se passe lorsque $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

2.4 Droite et cercles

Proposition 2. $C_{\pi/2} = i\mathbb{R}$.

Démonstration. C'est immédiat. L'équation cartésienne de $C_{\pi/2}$ est $x = 0$. $\square$

Considérons les demi-plans

$$H^+ = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$$
$$H^- = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) < 0\}$$

On a la partition

$$\mathbb{C} = H^- \cup i\mathbb{R} \cup H^+$$

Proposition 3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$z \in H^+ \iff |z-1| < |z+1|$$
$$z \in H^- \iff |z-1| > |z+1|$$
$$z \in i\mathbb{R} \iff |z-1| = |z+1|$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} |z-1| < |z+1| &\iff |z-1|^2 < |z+1|^2 \\ &\iff (z-1)(\overline{z}-1) < (z+1)(\overline{z}+1) \\ &\iff z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 < z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 \\ &\iff z + \overline{z} > 0 \\ &\iff z \in H^+ \end{aligned}$$

On a des preuves identiques pour H^- et $i\mathbb{R}$. $\square$

Corollaire 4. *On a la partition*

$$H^+ = \bigcup_{\theta \in [0,\pi/2[} C_\theta$$

Démonstration. Soit $\theta \in [0, \pi/2[$. On a

$$0 \leq k_\theta = \tan\frac{\theta}{2} < \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

De là, pour tout $z \in C_\theta$,

$$|z-1| = k_\theta |z+1| < |z+1|$$

Ainsi, $C_\theta \subset H^+$. Les C_θ sont évidemment non vides et disjoints deux à deux. Enfin, pour tout $z \in H^+$, on a $|z-1| < |z+1|$ et donc $|z-1| = k|z+1|$ où $k = |z-1|/|z+1| < 1$. En posant $\theta = 2\arctan k$, on a $\theta \in [0, \pi/4[$ et $z \in C_\theta$. $\square$

Remarque. On a de même la partition

$$H^- = \bigcup_{\theta \in \,]\pi/2, \pi]} C_\theta$$

Proposition 5. *Pour tout $\theta \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$, C_θ est le cercle de centre $1/\cos\theta$ et de rayon $\tan\theta$.*

Démonstration. Soit $\theta \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. En posant $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$, on a $z \in C_\theta$ si et seulement si

$$\cos\theta(x^2 + y^2) - 2x + \cos\theta = 0$$

Divisons par $\cos\theta \neq 0$ pour écrire

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\cos\theta}x + 1 = 0$$

qui se factorise en

$$\left(x - \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 + y^2 = \tan^2\theta$$

□

Définition 1. Les cercles C_θ, $\theta \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$, sont les *cercles d'Apollonius.*

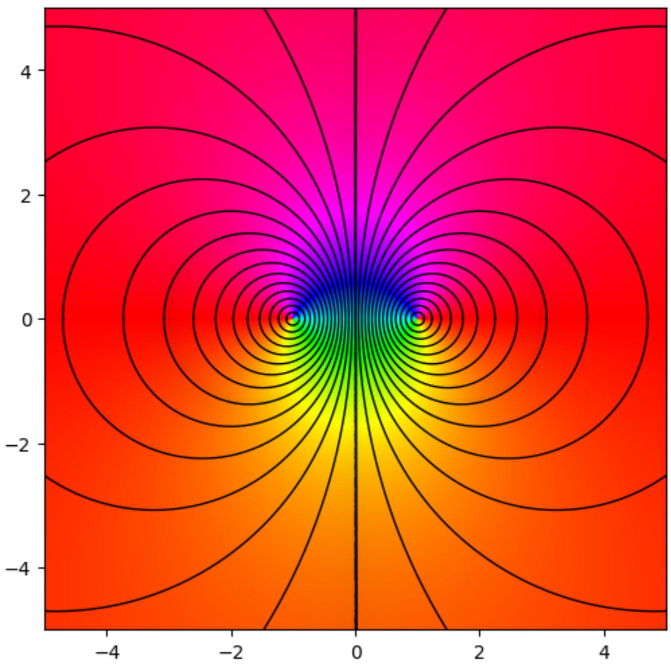

FIGURE 2 – Les cercles d'Apollonius

2.5 Interprétation géométrique

Soit $\theta \in]0, \pi/2[$. En supposant donnée une droite faisant un angle θ avec $i\mathbb{R}$, comment dessiner le cercle d'Apollonius C_θ à la règle et au compas ? Soit $z = e^{i\theta}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le triangle $(0, z, a)$ soit rectangle en z. Les côtés de l'angle droit ont pour longueurs $|z - a|$ et $|z| = 1$, l'hypoténuse est de longueur a. On a

$$\cos\theta = \frac{|z|}{a} = \frac{1}{a}$$

et donc

$$a = \frac{1}{\cos\theta}$$

Également,

$$\tan\theta = \frac{|z - a|}{|z|} = |z - a|$$

Ainsi,

- a est le centre de C_θ
- $z \in C_\theta$
- La tangente à C_θ en z est la droite (Oz).

Le réel θ est donc l'angle entre l'axe Ox et une des tangentes à C_θ passant par O (pour l'autre tangente, l'angle est évidemment $-\theta$). Dans la figure ci-dessous, on a pris $\theta = \pi/3$.

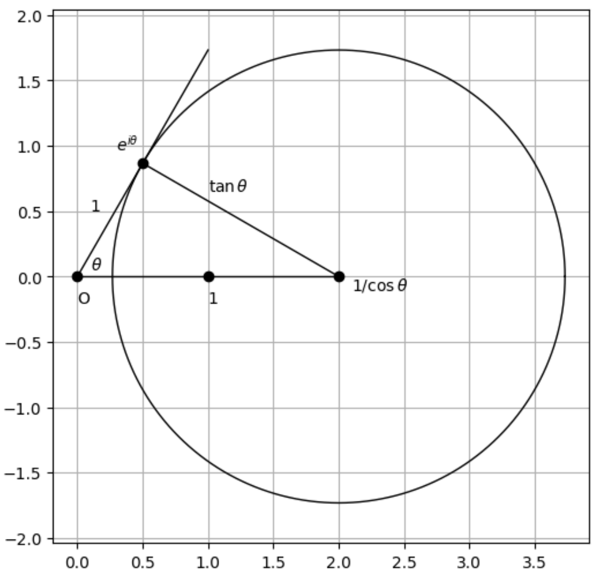

FIGURE 3 – Interprétation de θ

3 Une deuxième famille de cercles

3.1 Lignes de niveau de $\arg f_a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $\theta \in [0, \pi[$, notons

$$C'_\theta(a) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-a, a\} : \arg f_a(z) \equiv \theta \bmod \pi\} \cup \{-a, a\}$$

Remarquons que $z \in C'_\theta(a)$ si et seulement si $z = \pm a$ ou alors $\arg f_1(z/a) \equiv \theta \bmod \pi$, c'est à dire si et seulement si $z/a \in C'_\theta(1)$. Tout comme pour les cercles d'Apollonius, $C'_\theta(a)$ est l'image de $C'_\theta(1)$ par la similitude de centre O et de rapport a. Dans la suite, nous prendrons $a = 1$ et nous noterons $C'_\theta = C'_\theta(1)$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. On a $z \in C'_\theta$ si et seulement si

$$\arg \frac{z-1}{z+1} \equiv \arg e^{i\theta} \bmod \pi$$

ou encore

$$\arg \left(\frac{z-1}{z+1} e^{-i\theta} \right) \equiv 0 \bmod \pi$$

c'est à dire

$$\frac{z-1}{z+1} e^{-i\theta} \in \mathbb{R}$$

Ceci équivaut à dire que ce nombre complexe est égal à son conjugué, ce qui donne

$$(z-1)(\overline{z}+1)e^{-i\theta} = (z+1)(\overline{z}-1)e^{i\theta}$$

Il vient après quelques simplifications l'égalité équivalente

$$z\overline{z} \sin\theta - \frac{z - \overline{z}}{2i} 2\cos\theta - \sin\theta = 0$$

Remarquons que -1 et 1 vérifient cette égalité. Une équation cartésienne de C'_θ est ainsi

$$\boxed{(C'_\theta) \;\; \sin\theta(x^2 + y^2) - 2y\cos\theta - \sin\theta = 0}$$

Proposition 6. $C'_0 = \mathbb{R}$.

Démonstration. Une équation cartésienne de C'_0 est $y = 0$. $\square$

Proposition 7. *Pour tout $\theta \in]0, \pi[$, C'_θ est le cercle de centre $i \operatorname{cotan} \theta$ et de rayon $1/\sin\theta$.*

Démonstration. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Soit $z \in \mathbb{C}$. En posant $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$, on a $z \in C'_\theta$ si et seulement si

$$x^2 + y^2 - 2y \operatorname{cotan} \theta - 1 = 0$$

ou encore

$$x^2 + (y - \operatorname{cotan}\theta)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 8. *Les ensembles C'_θ, $\theta \in]0, \pi[$, sont les cercles passant par -1 et 1.*

Démonstration. Nous avons déjà montré que les C'_θ sont des cercles passant par -1 et 1. Inversement, soit C un cercle passant par -1 et 1. Une équation cartésienne de C est

$$(C)\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est le centre de C et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est son rayon. En écrivant que -1 et 1 appartiennent à C, on obtient

$$(1-a)^2 + b^2 = r^2$$
$$(1+a)^2 + b^2 = r^2$$

En soustrayant, il vient

$$0 = (1+a)^2 - (1-a)^2 = 4a$$

Ainsi, $a = 0$ et donc $1 + b^2 = r^2$. Posons $b = \operatorname{cotan}\theta$ où $\theta \in]0, \pi[$. On a alors

$$r^2 = 1 + b^2 = 1 + \operatorname{cotan}^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

d'où $r = 1/\sin\theta$. Ainsi, $C = C'_\theta$. $\square$

3.2 Intersections

Soient $\theta \in]0, \pi[$ et $\varphi \in [0, \pi[$. Rappelons que $k_\theta = \tan(\theta/2)$. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1, 1\}$. On a $z \in C_\theta \cap C'_\varphi$ si et seulement si

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k_\theta \text{ et } \arg\frac{z-1}{z+1} \equiv \varphi \bmod \pi$$

c'est à dire

$$\frac{z-1}{z+1} = \varepsilon k_\theta e^{i\varphi}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. On en déduit

$$z = \frac{1 + \varepsilon k_\theta e^{i\varphi}}{1 - \varepsilon k_\theta e^{i\varphi}}$$

Comme $\theta \neq 0, \pi$, les points -1 et 1 n'appartiennent pas à C_θ. Remarquons que si $\theta = 0$, l'expression ci-dessus donne $z = 1$. Également, si $\theta = \pi$, l'expression ci-dessus donne $z = -1$ (en convenant que $\infty/\infty = 1$), ce qui est la bonne réponse. On a donc pour tout $\theta \in [0, \pi]$ et tout $\varphi \in [0, \pi[$,

$$C_\theta \cap C'_\varphi = \left\{\frac{1 - k_\theta e^{i\varphi}}{1 + k_\theta e^{i\varphi}}, \frac{1 + k_\theta e^{i\varphi}}{1 - k_\theta e^{i\varphi}}\right\}$$

3.3 Orthogonalité

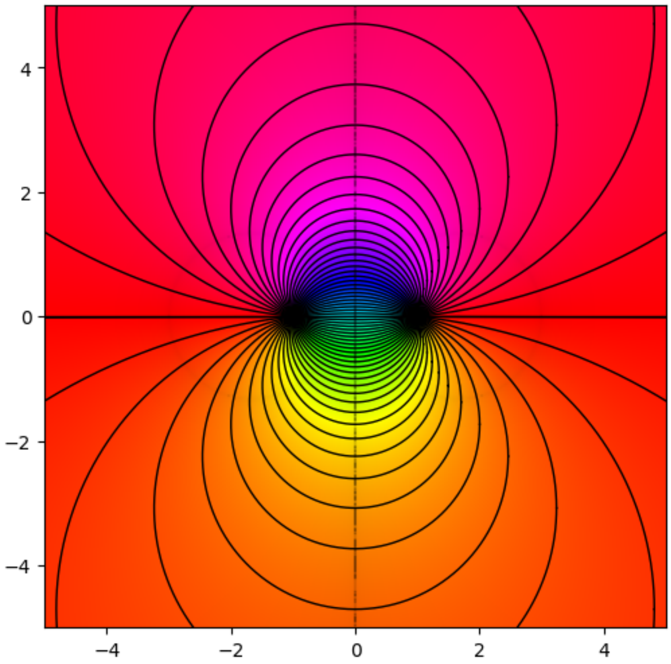

Figure 4 – Les cercles passant par -1 et 1

Proposition 9. *Pour tout* $\theta \in \,]0, \pi[$ *et tout* $\varphi \in [0, \pi[$, C_θ *et* C'_φ *sont orthogonaux.*

Démonstration. Supposons d'abord $\theta \neq \pi/2$ et $\varphi \neq 0$ de sorte que C_θ et C'_φ sont deux cercles. Le centre de C_θ est $1/\cos\theta$ et le centre de C'_φ est $i\,\mathrm{cotan}\,\varphi$. La distance au carré entre les deux centres est donc

$$d^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} + \mathrm{cotan}^2\varphi$$

Par ailleurs, le rayon de C_θ est $R = |\tan\theta|$ et le rayon de C'_φ est $R' = 1/\sin\varphi$. On a donc

$$\begin{aligned} R^2 + R'^2 &= \tan^2\theta + \frac{1}{\sin^2\varphi} \\ &= \tan^2\theta + 1 + \mathrm{cotan}^2\varphi \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta} + \mathrm{cotan}^2\varphi \end{aligned}$$

Ainsi, $R^2 + R'^2 = d^2$, ce qui est la condition d'orthogonalité des deux cercles.

Il reste à examiner les cas particuliers. Si $\theta = \pi/2$ et $\varphi \neq 0$, alors le cercle C'_φ est bien orthogonal à la droite $C_{\pi/2} = i\mathbb{R}$. Si $\theta \neq \pi/2$ et $\varphi = 0$ alors le cercle C_θ est bien orthogonal à la droite $C'_0 = \mathbb{R}$. Enfin, les droites $C_{\pi/2} = i\mathbb{R}$ et $C'_0 = \mathbb{R}$ sont orthogonales. $\square$

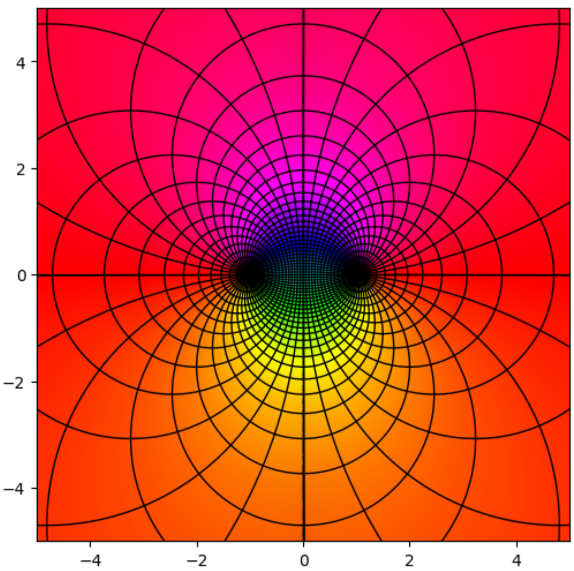

Figure 5 – Les deux familles de cercles

4 Méridiens et parallèles

Nous allons voir dans cette section que nos deux familles de cercles sont les *projections stéréographiques* des méridiens et des parallèles de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

4.1 La projection stéréographique

Soit $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ la sphère de centre O et de rayon 1.

$$\mathcal{S} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

Notons $E = (0, 0, 1)$. Pour tout $M = (X, Y, Z) \in \mathcal{S} \setminus \{E\}$, déterminons l'intersection de la droite (EM) avec le plan XOY. Soit $M' = (x, y, 0) \in XOY$. On a $M' \in (EM)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{EM'} = \lambda \overrightarrow{EM}$$

En passant aux coordonnées, ceci équivaut à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda X \\ y & = & \lambda Y \\ -1 & = & \lambda(Z-1) \end{array}\right.$$

La troisième égalité donne $\lambda = 1/(1 - Z)$. On en déduit que $M' \in XOZ$ si et seulement si

$$x = \frac{X}{1-Z} \text{ et } y = \frac{Y}{1-Z}$$

Sans surprise, $(EM) \cap XOZ$ est un singleton.

Notation. Nous noterons $F : \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ la fonction qui à $(X, Y, Z) \in \mathcal{S} \setminus \{E\}$ associe $z = x + iy$, avec de plus $F(E) = \infty$.

$F(E) = \infty$ et pour tout $(X, Y, Z) \in \mathcal{S} \setminus \{E\}$,

$$F(X, Y, Z) = \frac{X + iY}{1 - Z}$$

Définition 2. La fonction F est la *projection stéréographique.*

Proposition 10. *F est une bijection.*

Démonstration. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Soit $M = (X, Y, Z) \in \mathcal{S} \setminus \{E\}$ tel que $F(M) = z$. Remarquons que

$$X^2 + Y^2 = 1 - Z^2 = (1 + Z)(1 - Z)$$

En posant $\lambda = 1/(1 - Z)$, on a alors

$$x^2 + y^2 = \lambda^2(X^2 + Y^2) = \frac{X^2 + Y^2}{(1 - Z)^2} = \frac{1 + Z}{1 - Z}$$

d'où

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

On en déduit

$$1 - Z = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

et donc

$$\begin{cases} X & = & \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ Y & = & \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases}$$

Le nombre complexe z a donc au plus un antécédent par F. Inversement, En prenant les valeurs de X, Y, Z que nous venons de trouver,

$$X + iY = \frac{2z}{|z|^2 + 1}$$

d'où

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{4|z|^2}{(|z|^2 + 1)^2} + \frac{(|z|^2 - 1)^2}{(|z|^2 + 1)^2} = 1$$

donc $M = (X, Y, Z) \in \mathcal{S}$. De plus, $Z \neq 1$ donc $M \neq E$. Enfin,

$$1 - Z = \frac{2}{|z|^2 + 1}$$

et donc

$$F(M) = \frac{X + iY}{1 - Z} = z$$

Pour terminer, ∞ a un unique antécédent par F, à savoir E. $\square$

Notation. Nous noterons $G : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{S}$ la réciproque de F.

$G(\infty) = E$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$G(x+iy) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

Définition 3. La fonction G est la *projection stéréographique inverse.*

Pour résumer, F envoie bijectivement la sphère $\mathcal{S}$ sur $\overline{\mathbb{C}}$ et G envoie bijectivement $\overline{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{S}$.

4.2 Projection des cercles de $\mathcal{S}$

Rappelons le résultat bien connu (?) suivant : les cercles inclus dans $\mathcal{S}$ sont les intersections de $\mathcal{S}$ avec les plans de l'espace. Plus précisément, étant donné un plan P de $\mathbb{R}^3$, l'intersection de $\mathcal{S}$ et de P est

- Un cercle de rayon non nul si la distance de O à P est strictement inférieure à 1.
- Un singleton si la distance de O à P est égale à 1. Le plan P est alors tangent à $\mathcal{S}$.
- L'ensemble vide si la distance de O à P est strictement supérieure à 1.

Quelle est la projection stéréographique d'un cercle de $\mathcal{S}$?

Proposition 11. *Soit C un cercle de $\mathcal{S}$.*

- *Si $C = \{E\}$ alors $F(C) = \{\infty\}$.*
- *Si $C \neq \{E\}$ et $E \in C$, alors $F(C) = D \cup \{\infty\}$ où D est une droite de $\mathbb{C}$.*
- *Si $E \notin C$, alors $F(C)$ est un cercle de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $C = \mathcal{S} \cap P$ où P est un plan de $\mathbb{R}^3$ tel que la distance de O à P soit inférieure ou égale à 1. Donnons-nous une équation cartésienne de P :

$$(P)\ aX + bY + cZ + d = 0$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a $z \in F(C)$ si et seulement si $G(z) \in C$, ou encore, puisque $G(z) \in \mathcal{S}$, si et seulement si $G(z) \in P$. En reprenant l'expression de $G(z)$ que nous avons vue plus haut, cette condition s'écrit

$$2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) + d(x^2 + y^2 + 1) = 0$$

qui se réarrange en

$$(c + d)(x^2 + y^2) + 2ax + 2by + d - c = 0$$

Deux cas surviennent.

- Cas 1, $c+d=0$. Cette condition équivaut à $E \in C$. Dans ce cas, $z \in F(C)$ si et seulement si

$$2ax + 2by + d - c = 0$$

Si $a = b = 0$, alors P est un plan horizontal passant par E, c'est à dire le plan tangent à $\mathcal{S}$ en E. On a alors $C = \{E\}$ et $F(C) = \{\infty\}$. Sinon, $F(C) = D \cup \{\infty\}$ où D est la droite de $\mathbb{C}$ d'équation cartésienne

$$(D)\ 2ax + 2by + d - c = 0$$

- Cas 2, $c + d \neq 0$, c'est à dire $E \notin C$. On a $z \in F(C)$ si et seulement si

$$x^2 + y^2 + \frac{2a}{c+d}x + \frac{2b}{c+d}y + \frac{d-c}{c+d} = 0$$

qui est l'équation d'un cercle de $\mathbb{C}$. Le centre de ce cercle est

$$\left(-\frac{a}{c+d}, -\frac{b}{c+d}\right)$$

Son rayon R vérifie

$$\begin{aligned}(c+d)^2R^2 &= a^2 + b^2 + (c-d)(c+d)\\ &= a^2 + b^2 + c^2 - d^2\end{aligned}$$

Remarquons que la distance de O à P est

$$d(O, P) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 1$$

On a donc

$$d^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Ainsi, $F(C)$ est un « vrai » cercle de $\mathbb{C}$, de rayon

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}}{(c+d)^2}$$

□

4.3 Projections inverses

Posons nous la question de la réciproque. Quelle est la projection stéréographique inverse d'une droite de $\mathbb{C}$ (à laquelle on rajoute ∞) ? D'un cercle de $\mathbb{C}$?

Proposition 12. *Soit D une droite de $\mathbb{C}$. Soit $\overline{D} = D \cup \{\infty\}$. L'ensemble $G(\overline{D})$ est un cercle de $\mathcal{S}$ contenant E.*

Démonstration. Supposons que D a pour équation cartésienne

$$(D)\ ax + by + c = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit $M = (X, Y, Z) \in \mathcal{S}$. On a $M \in G(\overline{D})$ si et seulement si $F(M) \in \overline{D}$, c'est à dire $M = E$, ou alors $M \neq E$ et

$$a\frac{X}{1-Z} + b\frac{Y}{1-Z} + c = 0$$

c'est à dire

$$aX + bY - cZ + c = 0$$

Remarquons que $E = (0, 0, 1)$ vérifie cette égalité. L'équation ci-dessus est l'équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ contenant E. Ainsi, $G(\overline{D})$ est un cercle de $\mathcal{S}$ contenant E. $\square$

Proposition 13. *Soit C un cercle de $\mathbb{C}$. L'ensemble $G(C)$ est un cercle de $\mathcal{S}$ ne contenant pas E.*

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le centre de C et $R \geq 0$ son rayon. Une équation cartésienne de C est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

ou encore

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = R^2 - a^2 - b^2$$

Soit $M = (X, Y, Z) \in \mathcal{S}^3$. On a $M \in G(C)$ si et seulement si $F(M) \in C$, c'est à dire

$$X^2 + Y^2 - 2aX(1-Z) - 2bY(1-Z) = (R^2 - a^2 - b^2)(1-Z)^2$$

Remarquons que $X^2 + Y^2 = 1 - Z^2 = (1-Z)(1+Z)$ et que $Z \neq 1$. Cette égalité se réarrange donc en

$$1 + Z - 2aX - 2bY = (R^2 - a^2 - b^2)(1-Z)$$

ou encore, en posant $c = R^2 - a^2 - b^2$,

$$2aX + 2bY - (c+1)Z + (c-1) = 0$$

Si $a = b = 0$ alors $c + 1 = R^2 + 1 > 0$. L'équation ci-dessus est donc l'équation d'un plan P de $\mathbb{R}^3$. On a donc $G(C) = \mathcal{S} \cap P$. De plus, comme $C \neq \emptyset$, $G(C)$ n'est pas vide, donc $G(C)$ est un cercle de $\mathcal{S}$. Comme $E = (0, 0, 1) \notin P$, $E \notin G(C)$. $\square$

Remarque. En reprenant les notations de la preuve, la distance de O à P est

$$d(O, P) = \frac{|c-1|}{\sqrt{4a^2 + 4b^2 + (c+1)^2}} \leq \left|\frac{c-1}{c+1}\right| < 1$$

On retrouve le fait (évident) que $\mathcal{S} \cap P$ est un cercle. Cet ensemble est un singleton si et seulement si $d(O, P) = 1$, c'est à dire

$$(c-1)^2 = 4a^2 + 4b^2 + (c+1)^2$$

qui se simplifie en

$$a^2 + b^2 + c = 0$$

Mais $c = R^2 - a^2 - b^2$, donc cette égalité équivaut à $R = 0$. Ainsi, $G(C)$ est un cercle de $\mathcal{S}$ de rayon non nul, sauf si C lui même est un singleton.

4.4 Méridiens et parallèles

De façon non classique, plaçons le *pôle sud* de la sphère $\mathcal{S}$ en $S = (-1, 0, 0)$ et le *pôle nord* en $N = (1, 0, 0)$. L'*équateur* de $\mathcal{S}$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan YOZ. Le point E est ainsi un point de l'équateur, d'où son nom.

Définition 4. Les *parallèles* de $\mathcal{S}$ sont les intersections de $\mathcal{S}$ avec les plans parallèles à YOZ.

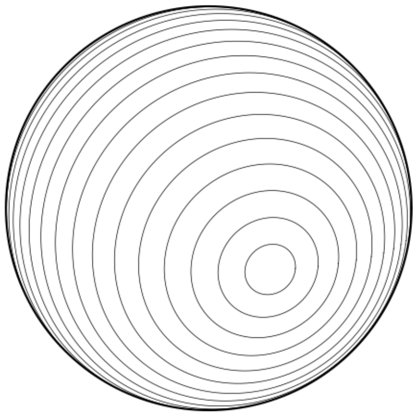

FIGURE 6 – Les parallèles

Appelons *axe* de la sphère $\mathcal{S}$ la droite (SN), c'est à dire l'axe OX (d'équations $Y = Z = 0$).

Définition 5. Les *méridiens* de $\mathcal{S}$ sont les intersections de $\mathcal{S}$ avec les plans contenant l'axe de $\mathcal{S}$.

En géographie, les méridiens sont des demi-cercles. Ce que nous appelons ici méridien est en fait la réunion de deux méridiens diamétralement opposés du géographe.

Voici réunis sur une même figure les parallèles et les méridiens.

4.5 Projection stéréographique des parallèles

Les parallèles de $\mathcal{S}$ sont les intersections de $\mathcal{S}$ avec les plans d'équation $X = c$ où $c \in \mathbb{R}$. Seuls les plans dont la distance à O est inférieure ou égale à 1, c'est à dire tels que $c \in [-1, 1]$, fournissent une intersection non vide. Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, notons P_θ le parallèle de $\mathcal{S}$ qui est l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $X = \cos\theta$. L'ensemble P_θ est l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ qui se trouvent à la *colatitude* θ.

Proposition 14. *Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $F(P_\theta) = C_\theta$.*

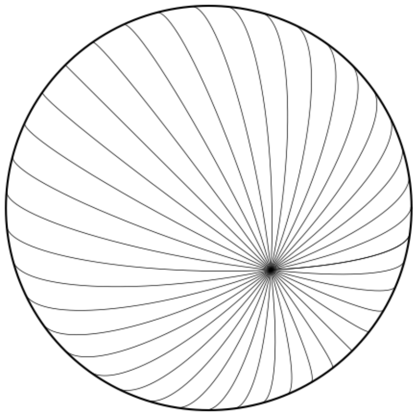

FIGURE 7 – Les méridiens

Démonstration. Soit $\theta \in [0, \pi]$. L'image de P_θ par la fonction F est la partie de $\mathbb{C}$ d'équation

$$\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = \cos\theta$$

ou encore

$$\cos\theta(x^2 + y^2) - 2x + \cos\theta = 0$$

Nous reconnaissons l'équation cartésienne de C_θ. $\square$

Remarque. Conformément à notre théorie, la projection stéréographique du parallèle P_θ est un cercle de $\mathbb{C}$, sauf si $E \in P_\theta$, ce qui arrive lorsque $\theta = 0$ (l'équateur est l'ensemble des points de la sphère de latitude 0). Plus précisément que ce que nous dit la proposition ci-dessus,

$$F(P_0) = C_0 \cup \{\infty\} = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

4.6 Projection stéréographique des méridiens

Les méridiens de $\mathcal{S}$ sont caractérisés par un angle. Pour tout $\theta \in [0, \pi[$, soit u l'image du vecteur $\overrightarrow{OE}$ par la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{ON}$ et d'angle θ. On a

$$u = (0, \sin\theta, \cos\theta)$$

Appelons M_θ le méridien de la sphère $\mathcal{S}$ qui est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan vectoriel engendré par u et $v = \overrightarrow{ON}$. Un vecteur normal à ce plan est le produit vectoriel

$$v \wedge u = (0, \cos\theta, -\sin\theta)$$

Ce plan a donc pour équation cartésienne

$$Y\cos\theta - Z\sin\theta = 0$$

Les points de M_θ sont les points de la sphère de *longitude* θ. Remarquons qu'avec nos conventions non géographiques (un méridien de géographe est un demi-cercle et pas un cercle), la longitude et la latitude ne caractérisent pas un point de la sphère mais *deux* points.

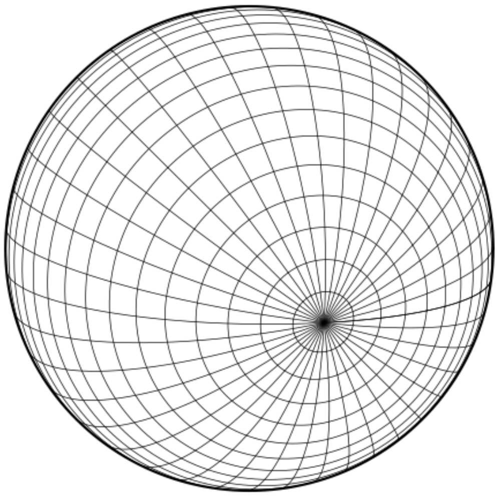

FIGURE 8 – Parallèles et méridiens

Exemples. Pour $\theta = 0$, l'équation devient $Y = 0$. C'est l'équation du grand cercle de $\mathcal{S}$ passant par N, S et E. Pour $\theta = \pi/2$, l'équation devient $Z = 0$ et nous avons cette fois-ci l'équation du grand cercle intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan XOY. Pour $\theta = \pi/4$, l'équation devient $Y - Z = 0$.

Proposition 15. *Pour tout* $\theta \in [0, \pi[$, $F(M_\theta) = C'_\theta$.

Démonstration. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $x, y \in \mathbb{R}$. On a $z \in F(M_\theta)$ si et seulement si $G(z) \in M_\theta$, c'est à dire

$$\frac{2y}{x^2+y^2+1}\cos\theta - \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\sin\theta = 0$$

ou encore, en multipliant par $x^2 + y^2 + 1$,

$$(x^2+y^2)\sin\theta - 2y\cos\theta - \sin\theta = 0$$

On reconnaît l'équation de C'_θ. $\square$

Remarque. Comme nous l'avons dit pour les parallèles, dans le cas particulier $\theta = 0$, le point E appartient à M_θ. On a donc plus rigoureusement

$$F(M_0) = C'_0 \cup \{\infty\} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Remarque. Nous obtenons ici une nouvelle interprétation du paramètre θ du cercle (ou de la droite) C'_θ. C'est l'angle entre le plan contenant l'équateur de $\mathcal{S}$ et le plan contenant le méridien M_θ.

Le dessin ci-dessous représente la sphère $\mathcal{S}$, ses méridiens, ses parallèles, ainsi que leurs projections stéréographiques qui sont nos deux familles de cercles. Pour des raisons de lisibilité, on a surélevé la sphère.

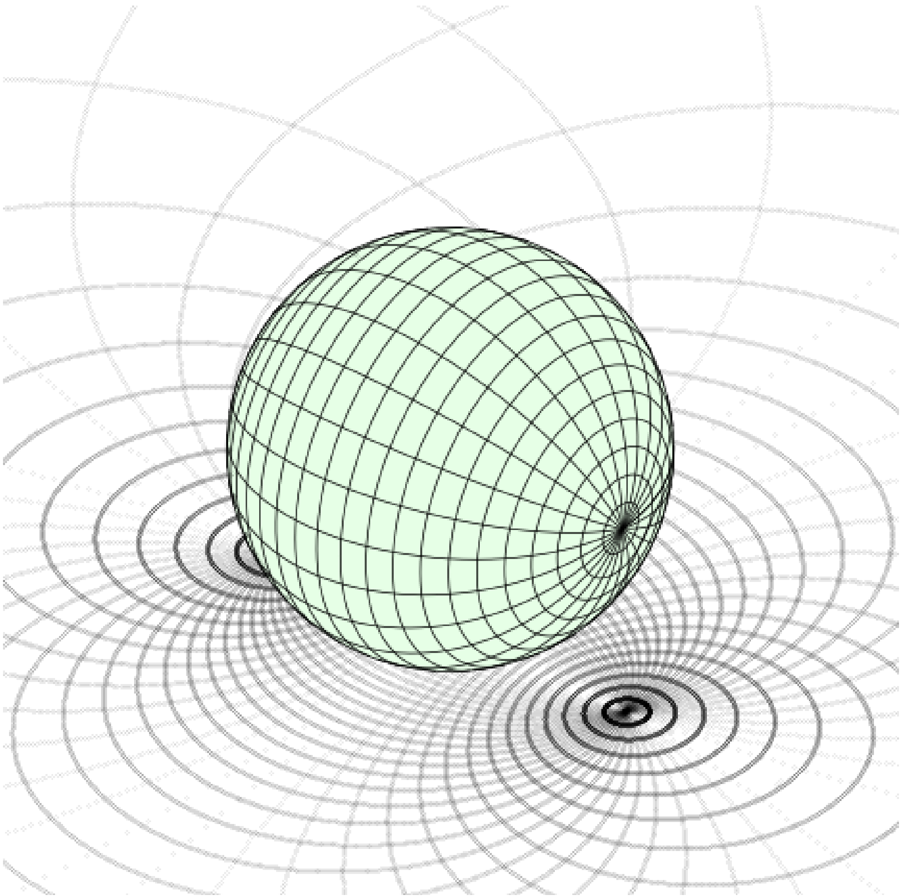

Figure 9 – Les méridiens, les parallèles et leurs projections