

Les intégrales de Fresnel

Marc Lorenzi

29 juin 2025

1 Introduction

Les *intégrales de Fresnel* sont les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}C(x) &= \int_0^x \cos t^2 dt \\S(x) &= \int_0^x \sin t^2 dt\end{aligned}$$

On pose également

$$E(x) = C(x) - iS(x) = \int_0^x e^{-it^2} dt$$

Ci-dessous, en traits pleins la fonction C et en pointillés la fonction S .

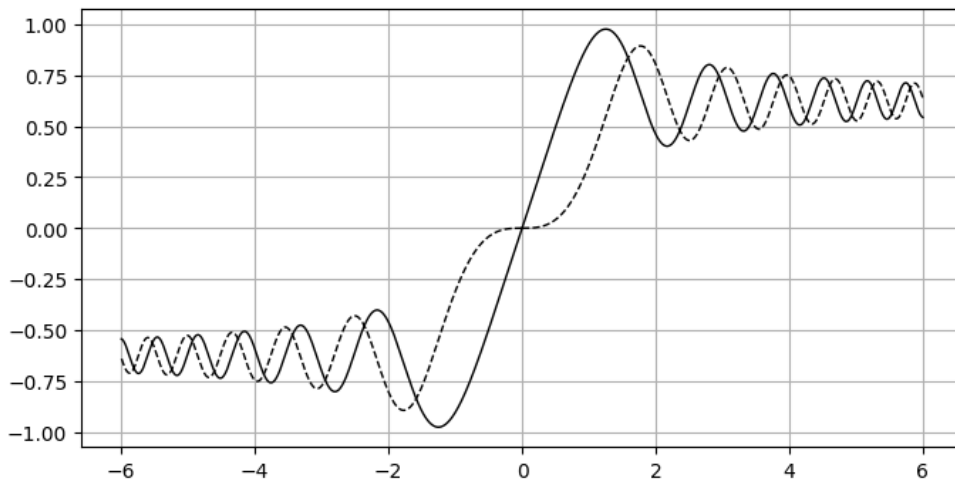


FIGURE 1 – Les fonctions C et S

Nous allons montrer que C et S ont une limite réelle lorsque x tend vers $+\infty$. Les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin t^2 dt$$

sont aussi couramment appelées les intégrales de Fresnel. La fonction $t \mapsto e^{-it^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est de module 1. En conséquence, l'une au moins des deux intégrales ci-dessus est semi-convergente et pas absolument convergente.

On peut en fait facilement montrer qu'aucune des deux intégrales n'est absolument convergente.

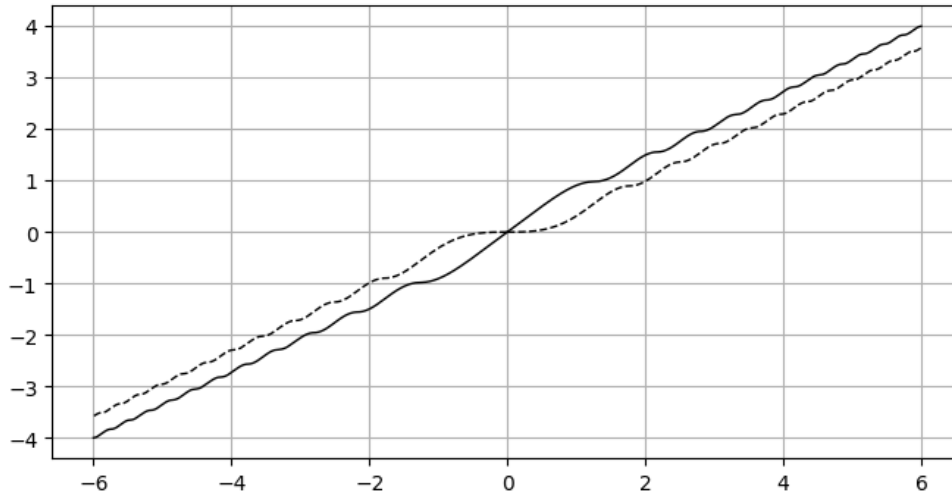


FIGURE 2 – $\int_0^x |\cos t^2| dt$ et $\int_0^x |\sin t^2| dt$

2 Intégrales de Fresnel, première méthode

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t, u) = \frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2 + i}$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tous $t, u \in \mathbb{R}_+$,

$$|\varphi(t, u)| \leq \frac{1}{\sqrt{u^4 + 1}}$$

Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $u \longmapsto \varphi(t, u)$ l'est donc aussi. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2 + i} du$$

Remarquons que par le théorème de convergence dominée, la fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons en fait montrer qu'elle est dérivable, mais auparavant regardons son comportement à l'infini.

Proposition 1. *Lorsque t tend vers $+\infty$, $g(t)$ tend vers 0.*

Démonstration. Pour tout $t > 0$,

$$|g(t)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} du$$

Posons $v = ut$ dans l'intégrale. Il vient

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} du = \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{t} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 2. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(t) = -\sqrt{\pi} e^{-it^2}$$

Démonstration. Pour tous $t, u \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, u) = -2te^{-it^2} e^{-u^2 t^2}$$

Soient $0 < a < b$. Pour tout $t \in [a, b]$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, u) \right| \leq 2be^{-a^2 u^2}$$

Le majorant ne dépend pas de t et il est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $t \in [a, b]$,

$$g'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, u) du = -2te^{-it^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} du = -\sqrt{\pi} e^{-it^2}$$

Ceci étant vrai pour tous a, b , la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons maintenant que lorsque t tend vers 0, $g'(t)$ tend vers $-\sqrt{\pi}$. La fonction g est donc aussi dérivable en 0 et $g'(0) = -\sqrt{\pi}$. L'égalité de la proposition est donc vérifiée pour $t = 0$. $\square$

Proposition 3.

$$\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-iu^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + i}$$

Démonstration. Pour tout $t > 0$,

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(u) du = -\sqrt{\pi} \int_0^t e^{-iu^2} du$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, $g(t)$ tend vers 0. On a donc

$$\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-iu^2} du = g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + i}$$

$\square$

Proposition 4.

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + i} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1 - i)$$

Démonstration. Considérons la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X^2 + i}$$

Soit $a = -e^{-i\pi/4}$. On a

$$F = \frac{1}{(X-a)(X+a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{X-a} - \frac{1}{X+a} \right)$$

Posons $a = p + iq$ où $p = -1/\sqrt{2}$ et $q = 1/\sqrt{2}$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{dt}{t-a} &= \int_{-x}^x \frac{t-\bar{a}}{|t-a|^2} dt \\ &= \int_{-x}^x \frac{t-p+iq}{(t-p)^2+q^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln((t-p)^2+q^2) + i \arctan \frac{t-p}{q} \right]_{-x}^x \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x-p)^2+q^2}{(x+p)^2+q^2} + i \left(\arctan \frac{x-p}{q} + \arctan \frac{x+p}{q} \right) \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, le logarithme tend vers 0 et la partie imaginaire tend vers π . Ainsi,

$$\int_{-x}^x \frac{dt}{t-a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} i\pi$$

Remplacer a par $-a$ revient à changer p, q et $-p, -q$. On en déduit facilement

$$\int_{-x}^x \frac{dt}{t+a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -i\pi$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = \frac{i\pi}{a} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-i)$$

La fonction F est paire, donc

$$\int_0^{+\infty} F(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

□

Proposition 5.

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{+\infty} \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Démonstration.

$$\int_0^{+\infty} e^{-iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

d'où le résultat en prenant les parties réelle et imaginaire. □

3 Deuxième méthode, holomorphicité

La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Cauchy, on a donc pour tout chemin fermé γ ,

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0$$

Soit $R > 0$. Prenons $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ où

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= [0, R] \\ \gamma_2 &= \left\{ |z| = R, \arg z \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \right\} \\ \gamma_3 &= \left\{ |z| \in [0, R], \arg z = \frac{\pi}{4} \right\}\end{aligned}$$

Orientons γ dans le sens usuel. Le paramétrage évident de γ_1 donne

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-t^2} dt$$

Le support du chemin γ_3 est un segment. Paramétrons γ_3 par

$$t \mapsto (R - t)e^{i\frac{\pi}{4}}, t \in [0, R]$$

On a

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-i(R-t)^2} dt = -e^{i\frac{\pi}{4}} E(R)$$

Nous avons gardé le meilleur pour la fin. Passons à l'intégrale le long de γ_2 . Paramétrons γ_2 par

$$z = Re^{it}, t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

On a

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz = iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} e^{-R^2 e^{2it}} dt$$

De là,

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos 2t} dt$$

La fonction $t \mapsto \cos 2t$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. En considérant la corde aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{4}$, on en déduit que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\cos 2t \geq 1 - \frac{4}{\pi}t$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \right| &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(1 - \frac{4}{\pi}t)} dt \\ &= Re^{-R^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{R^2 \frac{4}{\pi}t} dt \\ &= \frac{\pi}{4R} e^{-R^2} (e^{R^2} - 1) \\ &= \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2})\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque R tend vers $+\infty$, l'intégrale sur γ_2 tend vers 0.

Lorsque R tend vers $+\infty$, l'intégrale sur γ_1 tend vers l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On en déduit que l'intégrale le long de γ_3 tend vers $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Autrement dit, $E(R)$ a une limite réelle lorsque R tend vers $+\infty$, et

$$e^{i\frac{\pi}{4}} E(R) \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On a donc

$$E(R) \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1 - i)$$

4 Spirales de Cornu

Les *spirales de Cornu*, appelées aussi *clothoïdes* ou *spirales d'Euler* sont les arcs paramétrés vérifiant l'équation intrinsèque

$$c(s) = As$$

où c est la courbure, s est l'abscisse curviligne et $A \in \mathbb{R}_+^*$ est un réel fixé. Du point de vue dimensionnel, A est homogène à l'inverse d'un carré de longueur (bref, un inverse de surface).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ un arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Paramétrons f par l'abscisse curviligne s . Notons α l'argument du vecteur tangent unitaire $\frac{df}{ds}$, de sorte que

$$\frac{df}{ds} = e^{i\alpha}$$

La fonction $s \longmapsto \alpha(s)$ est un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^1$. Rappelons que

$$c(s) = \frac{d\alpha}{ds}$$

On en déduit que f est une spirale de Cornu si et seulement si

$$\frac{d\alpha}{ds} = As$$

ou encore

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \frac{1}{2} As^2$$

où $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. De là, f est solution de notre problème si et seulement si

$$\frac{df}{ds} = e^{i\alpha_0} e^{\frac{i}{2} As^2}$$

ou encore si et seulement si il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$f(s) = z_0 + e^{i\alpha_0} \int_0^s e^{\frac{i}{2} At^2} dt$$

Le paramètre $z_0 \in \mathbb{C}$ est un paramètre de translation. Le facteur $e^{i\alpha_0}$ est un paramètre de rotation. En notant $K = A/2$, Nous avons, à déplacement près, une unique spirale de Cornu f_K , définie par

$$f_K(s) = \int_0^s e^{iKt^2} dt$$

Remarquons que le changement de variable $u = t\sqrt{K}$ donne

$$f_K(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \int_0^{s\sqrt{K}} e^{iu^2} du = \frac{1}{\sqrt{K}} f_1(s\sqrt{K})$$

Le support de f_K se déduit donc du support de f_1 par une homothétie de rapport $1/\sqrt{K}$. En prenant $K = 1$, nous obtenons ainsi l'arc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par

$$f(s) = \int_0^s e^{it^2} dt = \overline{E}(s)$$

Les supports de toutes les autres clothoïdes s'en déduisent par des similitudes directes.

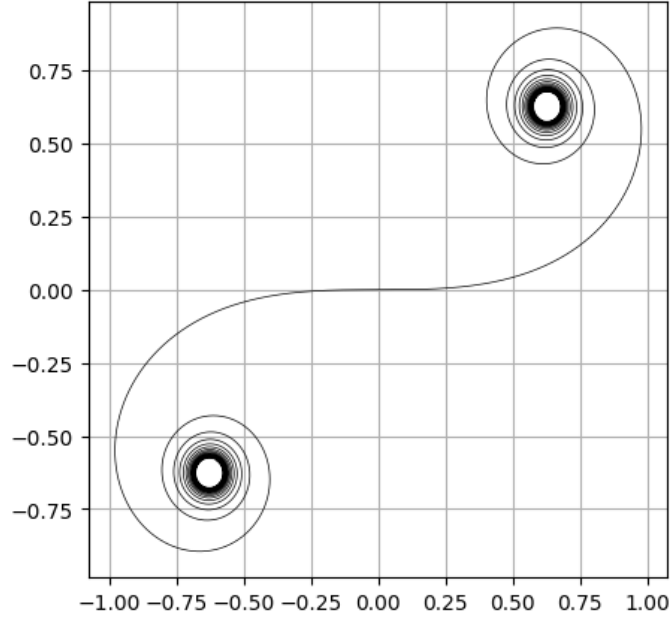


FIGURE 3 – La clothoïde

5 Développements asymptotiques

5.1 Un développement en série de C et S

Pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos t^2 dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{4n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \sin t^2 dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{4n+2} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} x^{4n+3} \end{aligned}$$

Ces développements en série permettent de déterminer des valeurs approchées de $C(x)$ et $S(x)$. Il faut toutefois noter que si l'on effectue des calculs sur des flottants en précision standard, les erreurs d'arrondi deviennent prépondérantes pour des valeurs de x de l'ordre de 5.

5.2 les fonctions C et S au voisinage de l'infini

Changeons légèrement la définition de E en posant $E(x) = C(x) + iS(x)$. Pour tout $x > 0$,

$$E(x) = \int_0^x e^{it^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i) - \int_x^{+\infty} e^{it^2} dt$$

Posons $u = t^2$ dans l'intégrale ci-dessus. Il vient

$$\int_x^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{1}{2} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \varphi_0(x)$$

Plus généralement, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\varphi_n(x) = \int_{x^2}^{+\infty} u^{-n-\frac{1}{2}} e^{iu} du$$

Par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= -i \left[u^{-n-\frac{1}{2}} e^{iu} \right]_{x^2}^{+\infty} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{x^2}^{+\infty} u^{-n-\frac{3}{2}} e^{iu} du \\ &= \frac{ie^{ix^2}}{x^{2n+1}} - \frac{i(2n+1)}{2} \varphi_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Remarquons également que pour tout $n \geq 1$,

$$|\varphi_n(x)| \leq \int_{x^2}^{+\infty} x^{-n-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{2n-1} \frac{1}{x^{2n-1}}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{ie^{ix^2}}{x} - \frac{i}{2}\varphi_1(x) \\ &= \frac{ie^{ix^2}}{x} - \frac{i}{2} \left(\frac{ie^{ix^2}}{x^3} - \frac{3i}{2}\varphi_2(x) \right) \\ &= \frac{ie^{ix^2}}{x} + \frac{e^{ix^2}}{2x^3} - \frac{3}{4}\varphi_2(x) \\ &= \frac{ie^{ix^2}}{x} + \frac{e^{ix^2}}{2x^3} - \frac{3}{4} \left(\frac{ie^{ix^2}}{x^5} - \frac{5i}{2}\varphi_3(x) \right) \\ &= \frac{ie^{ix^2}}{x} + \frac{e^{ix^2}}{2x^3} - \frac{3ie^{ix^2}}{4x^5} + \frac{15i}{16}\varphi_4(x) \end{aligned}$$

d'où

$$E(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i) - \frac{ie^{ix^2}}{2x} - \frac{e^{ix^2}}{4x^3} + \frac{3ie^{ix^2}}{8x^5} - \frac{15i}{32}\varphi_4(x)$$

où

$$|\varphi_4(x)| \leq \frac{2}{7x^7}$$

En prenant partie réelle et partie imaginaire, on obtient

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sin x^2}{2x} - \frac{\cos x^2}{4x^3} - \frac{3 \sin x^2}{8x^5} + O\left(\frac{1}{x^7}\right) \\ S(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\sin x^2}{4x^3} + \frac{3 \cos x^2}{8x^5} + O\left(\frac{1}{x^7}\right) \end{aligned}$$

Ces développements asymptotiques permettent d'obtenir des valeurs approchées de $C(x)$ et $S(x)$ pour de « grandes » valeurs de x . En fait, pour $x = 5$, l'erreur commise est déjà de l'ordre de 10^{-5} .

De façon informelle, pour de grandes valeurs de x , les spires de la clothoïde se « rapprochent » de cercles de rayon $\frac{1}{2x}$. On effectue un tour complet Lorsque x^2 varie de $2n\pi$ à $(2n+2)\pi$. Ceci représente une variation de x de

$$\sqrt{(2n+2)\pi} - \sqrt{2n\pi} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Pour avoir une précision raisonnable dans le tracé de la spirale de Cornu, il convient donc de prendre des valeurs de x très rapprochées, et ceci d'autant plus que x est grand. La figure ci-dessous représente la clothoïde pour $x \in [10, 30]$. On a pris 10000 points pour le tracé.

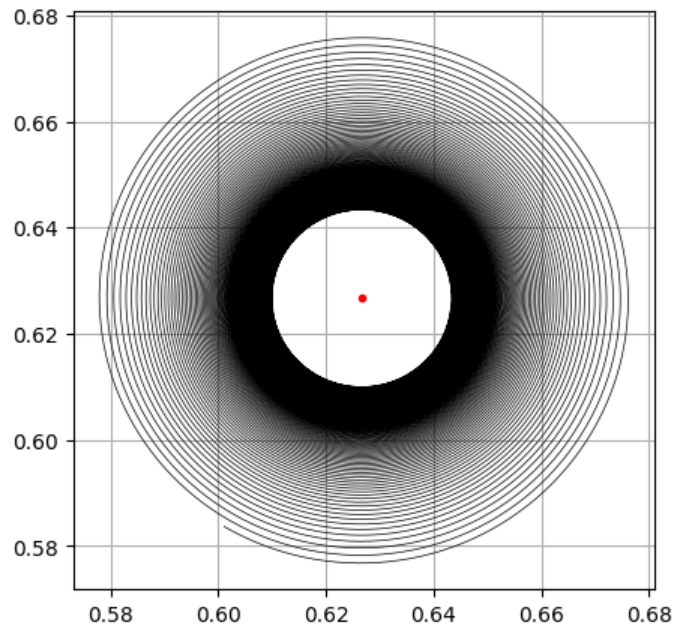


FIGURE 4 – Un zoom sur la clothoïde

Pour terminer, signalons que les fonctions de Fresnel et la clothoïde interviennent dans un certain nombre de problèmes de physique ou d'applications pratiques (élasticité, diffraction, courbes de transition pour les voies de chemin de fer et, plus récemment, pour les autoroutes, splines d'interpolation, etc.). Mon but dans cet article était uniquement l'étude de quelques propriétés mathématiques des intégrales de Fresnel. Le lecteur intéressé pourra se diriger vers les nombreux articles disponibles sur Internet. Un très bon point d'entrée est l'article de Raph Levien « The Euler spiral : a mathematical history » (2008).