

Coordonnées polaires

Marc Lorenzi

24 juin 2025

1 Coordonnées polaires

1.1 Introduction

Définition 1. Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Un couple de coordonnées polaires de M est un couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Pour des raisons techniques, nous allons dans la suite nous restreindre à l'ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x < 0\}$$

L'avantage de se cantonner à Ω est d'avoir, sous certaines conditions sur r et θ , existence et unicité d'un couple de coordonnées polaires.

Proposition 1. Soit $(x, y) \in \Omega$. Il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ tel que $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Démonstration. C'est un résultat classique du cours sur $\mathbb{C}$. $\square$

Nous poserons dorénavant

$$\Omega' = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$$

L'application $\Phi : \Omega' \longrightarrow \Omega$ définie par $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est donc une bijection.

Proposition 2. Soit $(x, y) \in \Omega$. Soit $(r, \theta) = \Phi^{-1}(x, y)$. On a

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = 2 \arctan \frac{y}{r+x}$$

Démonstration. C'est immédiat pour r . Passons à θ . Posons $t = \tan \frac{\theta}{2}$. On a

$$x = r \cos \theta = r \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{1}$$

$$y = r \sin \theta = r \frac{2t}{1+t^2} \tag{2}$$

De (1) on tire

$$t^2 = \frac{r-x}{r+x}$$

d'où

$$1+t^2 = \frac{2r}{r+x} \quad (3)$$

L'égalité (2) s'écrit

$$(1+t^2)y = 2rt$$

ou encore, par (3),

$$\frac{2ry}{r+x} = 2rt$$

Ainsi,

$$t = \tan \frac{\theta}{2} = \frac{y}{r+x}$$

Comme $\theta/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$, on en déduit le résultat. $\square$

1.2 Un difféomorphisme

Proposition 3. *L'application $\Phi : \Omega' \longrightarrow \Omega$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. Nous avons déjà vu la bijectivité. La classe $\mathcal{C}^1$ est immédiate. $\square$

Notons $x : \Omega' \longrightarrow \Omega$ et $y : \Omega' \longrightarrow \Omega$ les fonctions $(r, \theta) \longmapsto r \cos \theta$ et $(r, \theta) \longmapsto r \sin \theta$. La matrice des dérivées partielles de x et y par rapport à r et θ est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Le déterminant de J est $r \neq 0$. Cette matrice est donc inversible. Son inverse est

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Remarque. Les lettres x et y désignent deux choses : ce sont les coordonnées d'un point $(x, y) \in \Omega$. Mais ce sont aussi deux fonctions de Ω' vers Ω . De même, r et θ sont les coordonnées d'un point $(r, \theta) \in \Omega'$. Dans quelques secondes, ce seront aussi deux fonctions de Ω vers Ω' . Pour ne pas alourdir les notations, lorsque nous écrivons $\partial x / \partial r$, il faut comprendre que nous pensons à l'image du couple (r, θ) par la fonction $\partial x / \partial r$. Nous avons déjà suivi cette convention lorsque nous avons écrit la matrice J , qui est en réalité $J(r, \theta)$. Une façon simple de s'y retrouver est la suivante. Si nous écrivons $\partial y / \partial \theta$ c'est que y est la fonction et θ est la variable. Il faut en fait comprendre $\partial y / \partial \theta(r, \theta)$. En revanche, lorsque nous écrivons $\partial \theta / \partial y$, θ sera la fonction et y sera la variable, et cela voudra dire réellement $\partial \theta / \partial y(x, y)$.

Proposition 4. *L'application $\Phi^{-1} : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .*

Démonstration. Pour tout $(x, y) \in \Omega$, notons $\Phi^{-1}(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$. Par la proposition 2,

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\theta(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{r(x, y) + x} \quad (5)$$

Les fonctions r et θ sont donc clairement de classe $\mathcal{C}^1$. $\square$

1.3 Les dérivées partielles de r et θ

Pour tout $x, y \in \Omega$, $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. On a donc

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad (6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta \quad (7)$$

Par la proposition 2

$$\theta(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{r + x}$$

ou encore

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{y}{r + x}$$

Remarquons que

$$1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2r}{r + x} \quad (8)$$

Dérivons (8) par rapport à x . Souvenons-nous que $\partial r / \partial x = x/r$.

$$\frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{y}{(r + x)^2} \left(\frac{x}{r} + 1 \right)$$

ou encore

$$\frac{r}{r + x} \frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{y}{(r + x)^2} \frac{x + r}{r}$$

et finalement

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{y}{r^2} = - \frac{\sin \theta}{r} \quad (9)$$

Dérivons maintenant (8) pour obtenir la dérivée partielle de θ par rapport à y .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{(r + x) - y \frac{y}{r}}{(r + x)^2} \\ &= \frac{r(r + x) - y^2}{r(r + x)^2} \\ &= \frac{x(r + x)}{r(r + x)^2} = \frac{x}{r(r + x)} \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{r}{r + x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r(r + x)}$$

et finalement

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (10)$$

En appelant J' la matrice des dérivées partielles de r et θ nous avons donc

$$J' = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

D'une certaine façon, $J' = J^{-1}$. Plus rigoureusement, J' est une fonction de deux variables (x, y) alors que J est une fonction de deux variables (r, θ) . On a pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$J'(x, y) = J((r(x, y), \theta(x, y)))^{-1}$$

1.4 Le gradient en coordonnées polaires

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g = f \circ \Phi$. On a donc pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$f(x, y) = g(r(x, y), \theta(x, y))$$

Par la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

De là,

$$\nabla f = \frac{\partial g}{\partial r}(\cos \theta, \sin \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(-\sin \theta, \cos \theta)$$

Posons $u_r(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $u_\theta(r, \theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. La famille (u_r, u_θ) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. C'est ce que l'on appelle la *base locale* des coordonnées polaires. On a donc

$$\nabla f = \frac{\partial g}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} u_\theta \quad (11)$$

Remarque. La forme complète serait (beurk !)

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial r}(r(x, y), \theta(x, y)) u_r(r(x, y), \theta(x, y)) + \\ &\quad \frac{1}{r(x, y)} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r(x, y), \theta(x, y)) u_\theta(r(x, y), \theta(x, y)) \end{aligned}$$

2 Une équation aux dérivées partielles

À titre d'application, nous allons résoudre une équation aux dérivées partielles d'ordre 1. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Nous allons déterminer les fonctions U de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telles que

pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$(E) \quad \nabla U(x, y) = -\frac{k}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y)$$

qui s'écrit plus simplement

$$(E) \quad \nabla U(x, y) = -\frac{k u_r}{x^2 + y^2}$$

Toute ressemblance avec un problème physique bien connu est évidemment purement fortuite.

Soit $U \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit

$$V = U \circ \Phi : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$$

La fonction U est solution de (E) si et seulement si V est solution de

$$(E') \quad \frac{\partial V}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} u_\theta = -\frac{k}{r^2} u_r$$

c'est à dire, puisque (u_r, u_θ) est libre, si et seulement si

$$(E') \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k}{r^2} \text{ et } \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

Une solution évidente de (E') est la fonction

$$V_0 : (r, \theta) \longmapsto \frac{k}{r}$$

En posant $U_0 = V_0 \circ \Phi^{-1}$, U est solution de (E) si et seulement si $\nabla U = \nabla U_0$, ou encore $\nabla(U - U_0) = 0$.

Proposition 5. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\nabla f = 0$ si et seulement si f est constante.

Démonstration. Si f est constante, on a évidemment $\nabla f = 0$. Inversement, supposons $\nabla f = 0$. Soit $M = (x, y) \in \Omega$. Soit $A = (1, 0)$. Nous avons beaucoup de chance, parce que l'ouvert Ω est étoilé par rapport à A : le segment $[A, M]$ est inclus dans Ω . Considérons la fonction $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ définie par

$$\varphi(t) = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OM} = (1 + t(x - 1), ty)$$

La fonction φ est un *paramétrage* du segment $[A, M]$. Soit $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g = f \circ \varphi$. Par la règle de la chaîne, g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$g'(t) = (x - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + y \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))$$

Comme $\nabla f = 0$, $g' = 0$ et donc, g est constante. Remarquons que

$$g(0) = f(\varphi(0)) = f(A)$$

$$g(1) = f(\varphi(1)) = f(M)$$

Comme $g(0) = g(1)$, on a donc $f(M) = f(A)$. La fonction f est ainsi constante sur Ω , égale à $f(A)$. $\square$

Nous avons donc résolu (E).

Proposition 6. Les solutions de (E) sont les fonctions $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $(x, y) \in \Omega$ par

$$U(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} + c$$

où $c \in \mathbb{R}$.

Remarque. Notons $\Omega'' = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Les fonctions U ci-dessus sont clairement solutions de (E) sur Ω'' . En fait, ce sont les seules mais notre technique de preuve pour l'unicité ne fonctionne plus : Ω'' n'est pas étoilé. En revanche, nous pouvons raisonner comme suit.

Soit $f : \Omega'' \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que $\nabla f = 0$. On a a fortiori $\nabla f = 0$ sur Ω donc f est nulle sur Ω . Il reste à montrer que f est nulle sur $\{(x, 0) : x < 0\}$. Soit $x < 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $(x, \varepsilon) \in \Omega$ et donc $f(x, \varepsilon) = 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est aussi continue. Lorsque ε tend vers 0, $0 = f(x, \varepsilon)$ tend vers $f(x, 0)$. Ainsi, $f(x, 0) = 0$.

3 Une autre équation aux dérivées partielles

Résolvons l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Comme dans l'exemple précédent, posons $g = f \circ \Phi : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$. On a donc pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$f(x, y) = g(r(x, y), \theta(x, y))$$

Par la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= r \frac{\partial g}{\partial r} \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de (E) si et seulement si pour tout $(r, \theta) \in \Omega'$,

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

ou encore

$$(E') \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

On laisse montrer en exercice que g est solution de (E') si et seulement si il existe $G :]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(r, \theta) \in \Omega'$,

$$g(r, \theta) = G(\theta)$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = G(\theta(x, y))$$