

L'inégalité de Hadamard

Marc Lorenzi

23 juin 2025

On se place dans un espace euclidien orienté E de dimension $n \geq 1$.

Proposition 1. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . On a

$$(1) \quad |[u_1, \dots, u_n]| \leq \|u_1\| \dots \|u_n\|$$

Démonstration. Si la famille $\mathcal{F}$ est liée, le produit mixte est nul, d'où l'inégalité. Supposons dorénavant que $\mathcal{F}$ est libre. C'est donc une base de E , puisque $\dim E = |\mathcal{F}|$.

Commençons par supposer que $\mathcal{F}$ est orthonormale. On a alors

$$[u_1, \dots, u_n] = \pm 1$$

Les normes des u_i sont égales à 1, il y a donc égalité dans (1).

Prenons maintenant $\mathcal{F}$ orthogonale. La famille

$$\mathcal{F}' = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$$

est orthonormale, on a donc égalité dans (1). Par la n -linéarité du produit mixte,

$$[\mathcal{F}] = \|u_1\| \dots \|u_n\| [\mathcal{F}'] = \pm \|u_1\| \dots \|u_n\|$$

On a donc égalité dans (1).

Passons à une famille $\mathcal{F}$ quelconque. Appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt à $\mathcal{F}$ pour définir une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On pose donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$e_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k,i} e_i$$

On a

$$[u_1, \dots, u_n] = [e_1, e_2 + \lambda_{2,1}e_1, e_3 + \lambda_{3,1}e_1 + \lambda_{3,2}e_2, \dots, e_n + \lambda_{n,1}e_1 + \dots + \lambda_{n,n-1}e_{n-1}]$$

Par l'alternance du produit mixte,

$$[u_1, \dots, u_n] = [e_1, \dots, e_n] = \pm \|e_1\| \dots \|e_n\|$$

Regardons maintenant la norme de e_k . On a

$$\|u_k\|^2 = \|e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k,i} e_i\|^2$$

La somme ci-dessus est orthogonale à e_k . Par Pythagore,

$$\|u_k\|^2 = \|e_k\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k,i} e_i \right\|^2$$

d'où

$$\|u_k\|^2 \geq \|e_k\|^2$$

puis (1). $\square$

Proposition 2. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de n vecteurs de E . Les propriétés ci-dessous sont équivalentes.

- (i) $||[u_1, \dots, u_n]| = \|u_1\| \dots \|u_n\|$.
- (ii) la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale.

Démonstration. Reprenons pas à pas la preuve de la proposition 1. Les deux premières étapes de la preuve montrent que si $\mathcal{F}$ est orthogonale, on a égalité. Regardons maintenant le cas où $\mathcal{F}$ est quelconque. Inversement, supposons (i). On a donc

$$\|u_1\| \dots \|u_n\| = \|e_1\| \dots \|e_n\|$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u_k\| \geq \|e_k\|$. Ceci entraîne que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u_k\| = \|e_k\|$. De là,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k,i} e_i = 0$$

et donc (liberté), pour tous $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_{k,i} = 0$. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k = e_k$. La famille $\mathcal{F}$ est donc orthogonale. $\square$

Remarque. Si $n = 3$, il y a une démonstration plus concrète des deux propositions précédentes. En effet,

$$|[u_1, u_2, u_3]| = |\langle u_1 \wedge u_2, u_3 \rangle| \leq \|u_1 \wedge u_2\| \|u_3\| \leq \|u_1\| \|u_2\| \|u_3\|$$

Dans le cas où $\mathcal{F}$ est libre, on a égalité si et seulement si les deux inégalités ci-dessus sont des égalités. Mais

$$\|u_1 \wedge u_2\| = \|u_1\| \|u_2\|$$

si et seulement si u_1 et u_2 sont orthogonaux. Et aussi, par le cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz,

$$|\langle u_1 \wedge u_2, u_3 \rangle| = \|u_1 \wedge u_2\| \|u_3\|$$

si et seulement si u_3 est colinéaire à $u_1 \wedge u_2$, c'est à dire orthogonal à u_1 et u_2 .

Définition 1. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hadamard* lorsque

- Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,j} = \pm 1$.
- Les colonnes de A sont orthogonales deux à deux.

La deuxième condition signifie précisément que pour tous $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts,

$$\sum_{i=1}^n A_{i,j} A_{i,k} = 0$$

Proposition 3. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n([-1, 1])$,

$$(2) |\det A| \leq \sqrt{n}^n$$

Il y a égalité si et seulement si A est une matrice de Hadamard.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ la famille des colonnes de A , interprétées comme des vecteurs de E . On a alors

$$|\det A| = |[u_1, \dots, u_n]| \leq \|u_1\| \dots \|u_n\|$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\|u_j\|^2 = \sum_{i=1}^n A_{i,j}^2 \leq n$$

et donc

$$\|u_j\| \leq \sqrt{n}$$

d'où (2).

Supposons que A est une matrice de Hadamard. La famille $\mathcal{F}$ est une base orthogonale de E . Par la proposition 2,

$$|\det A| = |[u_1, \dots, u_n]| = \|u_1\| \dots \|u_n\|$$

De plus, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\|u_j\|^2 = \sum_{i=1}^n (\pm 1)^2 = n$$

d'où l'égalité dans (2). Inversement, supposons qu'on a égalité dans (2). On a donc $\det A \neq 0$. La famille $\mathcal{F}$ est ainsi une base de E . Par la proposition 2, $\mathcal{F}$ est orthogonale. On a donc

$$|\det A| = \|u_1\| \dots \|u_n\|$$

Remarquons maintenant que comme les coefficients de A sont égaux à ± 1 , les normes des u_j sont inférieures ou égales à $\sqrt{n}$. Pour que le produit de ces normes soit égal à $\sqrt{n}^n$, il faut donc que chacune des normes soit égale à $\sqrt{n}$. On a donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{i=1}^n A_{i,j}^2 = n$$

Les $A_{i,j}$ appartenant à ± 1 , ceci entraîne pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,j} = \pm 1$. Ainsi, A est une matrice de Hadamard. $\square$