Sinus, cosinus et exponentielle

Marc Lorenzi

26 septembre 2024

Résumé

La définition « moderne » des fonctions cosinus et sinus passe par la construction de l'exponentielle complexe au moyen d'une série entière : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Connaissant la théorie des séries entières, il est alors possible d'en déduire les fonctions cosinus et sinus, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

puis d'en déduire les propriétés des fonctions cos et sin. Nous allons dans cet article construire ces fonctions tout autrement, en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral : toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

1 Cosinus et sinus entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

Nous allons commencer par construire la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. *Nous appellerons cette fonction* S_0.

1.1 Construction du sinus

La fonction $\varphi :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in]-1, 1[$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est continue sur $]-1, 1[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle. Notons A la primitive de φ qui s'annule en 0. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$A(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

La fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et $A' = \varphi > 0$. A est donc strictement croissante. Remarquons également que le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale montre que A est impaire.

Proposition 1. *La fonction A a une limite finie en ± 1.*

Démonstration. Par l'imparité de A, il suffit de regarder ce qui se passe en 1. La fonction A est croissante, elle possède donc en 1 une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{1-t}} \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$A(x) \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = [-2\sqrt{1-t}]_0^x = 2(1-\sqrt{1-x}) \leq 2$$

On en déduit que $\ell \leq 2$. □

Définissons maintenant le nombre π.

Définition 1.

$$\pi = 2 \lim_{x \to 1} A(x)$$

Par la croissance stricte de A, tout ce que nous pouvons dire est que

$$0 < \pi < 4$$

Il nous suffira pour la suite de connaître l'existence du réel π.

Notons encore A le prolongement par continuité de A à $[-1, 1]$. On a donc $A(1) = \pi/2$ et $A(-1) = -\pi/2$. Notre nouvelle fonction A est impaire, continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. Lorsque x tend vers ± 1,

$$A'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow +\infty$$

La fonction A n'est donc pas dérivable en ± 1. Sa courbe y possède cependant une tangente verticale.

La croissance stricte et la continuité montrent que A est une bijection strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Appelons S_0 la réciproque de A. La fonction $S_0 : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ est donc une bijection continue strictement croissante. De plus, S_0 est impaire car c'est la réciproque d'une bijection impaire.

Définition 2. $S_0 = A^{-1}$.

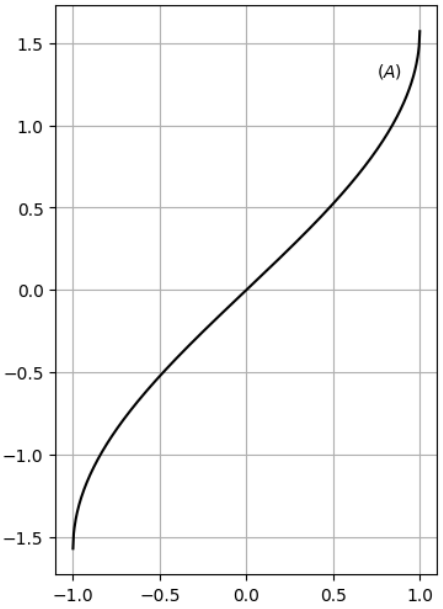

FIGURE 1 – La fonction A

1.2 Construction du cosinus, dérivabilité

Construisons maintenant la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. *Nous la noterons* C_0.

La fonction A est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-1,1[$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Sur $]-1,1[$, $A' > 0$. Il en résulte que S_0 est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-\pi/2,\pi/2[$,

$$S_0'(x) = \frac{1}{A'(S_0(x))} = \sqrt{1 - S_0(x)^2}$$

Définissons assez logiquement la fonction $C_0 : [-\pi/2,\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$

Définition 3. $C_0 = \sqrt{1 - S_0^2}$.

Notons au passage que pour tout $x \in [-\pi/2,\pi/2]$,

$$C_0(x)^2 + S_0(x)^2 = 1$$

Proposition 2. *C_0 est paire.*

Démonstration. Par l'imparité de S_0, on a pour tout $x \in [-\pi/2,\pi/2]$,

$$C_0(-x) = \sqrt{1 - S_0(-x)^2} = \sqrt{1 - S_0(x)^2} = C_0(x)$$

□

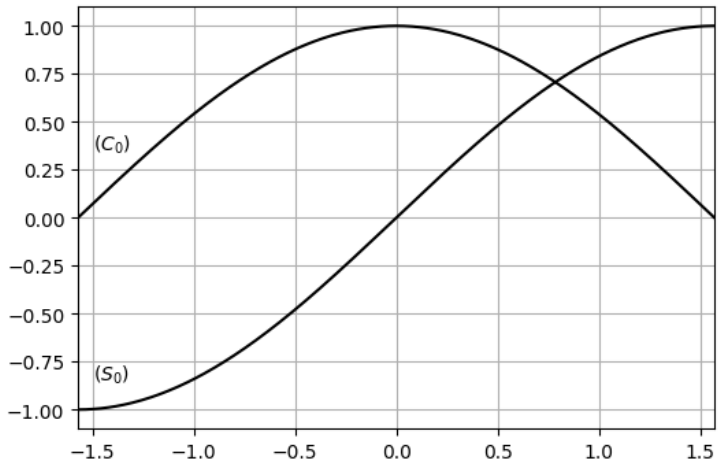

FIGURE 2 – Les fonctions S_0 et C_0

Proposition 3. *S_0 est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et $S_0' = C_0$.*

Démonstration. Nous avons déjà vu la dérivabilité de S_0 sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Il reste à regarder ce qui se passe en $\pm\pi/2$. Par imparité de S_0, il suffit d'étudier en $\pi/2$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$S_0'(x) = C_0(x) = \sqrt{1 - S_0(x)^2}$$

La fonction S_0 est continue en $\pi/2$. Lorsque x tend vers $\pi/2$, $S_0'(x)$ tend donc vers $\sqrt{1 - S_0(\pi/2)^2} = 0$. Ainsi, S_0 est dérivable en $\pi/2$ et $S_0'(\pi/2) = 0 = C_0(\pi/2)$. □

Proposition 4. *C_0 est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et $C_0' = -S_0$.*

Démonstration. Sur $]-\pi/2, \pi/2[$, $S_0 \in]-1, 1[$ donc $C_0 = \sqrt{1 - S_0^2}$ est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Sur cet intervalle,

$$C_0' = -\frac{2S_0 S_0'}{2\sqrt{1 - S_0^2}} = -\frac{2S_0\sqrt{1 - S_0^2}}{2\sqrt{1 - S_0^2}} = -S_0$$

Lorsque x tend vers $\pi/2$, $C_0'(x) = -S_0(x)$ tend vers $-S_0(\pi/2) = -1$. Ainsi, C_0 est dérivable en $\pi/2$ et

$$C_0'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -S_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

De même en $-\pi/2$ par parité. □

Proposition 5. *Les fonctions C_0 et S_0 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_0 et S_0 sont de classe C^n. Tout d'abord, C_0 est dérivable et $C_0' = S_0$. Comme S_0 est continue, C_0 est de classe $\mathcal{C}^1$. De même, $S_0' = C_0$ montre que S_0 est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que C_0 et S_0 sont de classe $\mathcal{C}^n$. De $C_0' = S_0$ on déduit que C_0' est de classe $\mathcal{C}^n$, donc que C_0 est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. De même, S_0 est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. □

2 L'exponentielle

Nous pouvons maintenant définir l'exponentielle complexe sur $[-\pi/2, \pi/2]$, que nous noterons E_0. Nous prolongerons ensuite la fonction E_0 à $\mathbb{R}$.

2.1 Introduction

Définissons la fonction $E_0 : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{C}$.

Définition 4. $E_0 = C_0 + iS_0$.

Par la dérivabilité de C_0 et S_0, la fonction E_0 est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et sur cet intervalle,

$$E_0' = -S_0 + iC_0 = i(C_0 + iS_0) = iE_0$$

Les fonctions S_0 et C_0 sont respectivement paire et impaire. Qu'en est-il de E_0 ?

Proposition 6. *Pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $E_0(-x) = \overline{E_0(x)}$.*

Démonstration. En effet,

$$E_0(-x) = C_0(-x) + iS_0(-x) = C_0(x) - iS_0(x) = \overline{E_0(x)}$$

□

Notons également le résultat suivant.

Proposition 7. *Pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $|E_0(x)| = 1$.*

Démonstration. En effet,

$$|E_0(x)|^2 = C_0(x)^2 + S_0(x)^2 = 1$$

□

2.2 Prolongements

Prolongeons maintenant la fonction E_0 à $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $k_x \in \mathbb{Z}$ tel que $x - k_x\pi \in]-\pi/2, \pi/2]$. Nous ne nous en servirons pas vraiment, mais signalons le résultat ci-dessous.

Proposition 8. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$k_x = \left\lceil \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rceil$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On a $x - k\pi \in]-\pi/2, \pi/2]$ si et seulement si

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

ou encore

$$k < \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \leq k + 1$$

d'où le résultat. □

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $k_{x+n\pi} = k_x + n$.

Définition 5. La fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$E(x) = (-1)^{k_x} E_0(x - k_x\pi)$$

Prolongeons également les fonctions C_0 et S_0 à $\mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$E(x) = C(x) + iS(x)$$

Définition 6. $C = \text{Re } E$ et $S = \text{Im } E$.

Proposition 9. *Les fonctions E, C et S sont périodiques, de période 2π.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $k_{x+2\pi} = k_x + 2$. De là,

$$E(x + 2\pi) = (-1)^{k_x+2} E_0(x + 2\pi - (k_x + 2)\pi) = (-1)^{k_x} E_0(x - k_x\pi) = E(x)$$

On en déduit que 2π est une période de E, et donc aussi de C et S. □

Nous verrons plus loin que 2π est la plus petite période strictement positive des fonctions E, C et S.

Proposition 10. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$C^2(x) + S^2(x) = 1$$

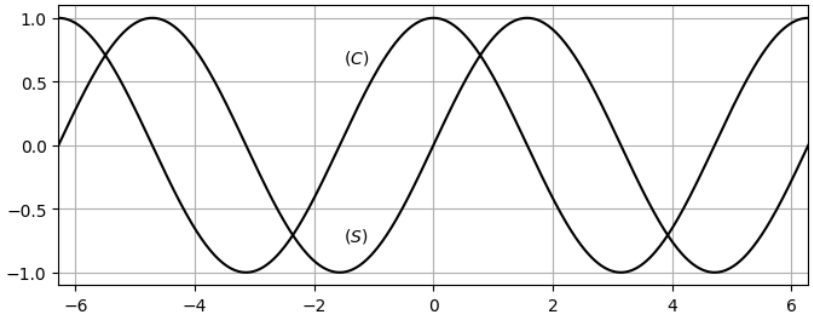

FIGURE 3 – Les fonctions S et C

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$E(x) = (-1)^{k_x} E_0(x - k_x\pi)$$

et donc

$$C(x) = (-1)^{k_x} C_0(x - k_x\pi) \text{ et } S(x) = (-1)^{k_x} S_0(x - k_x\pi)$$

De là,

$$C^2(x) + S^2(x) = C_0^2(x - k_x\pi) + S_0^2(x - k_x\pi) = 1$$

□

Corollaire 11. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|E(x)| = 1$.*

Démonstration. En effet, $|E(x)|^2 = C^2(x) + S^2(x) = 1$. □

2.3 Quelques symétries de E, C et S

Proposition 12. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x + \pi) = -E(x)$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappelons que $k_{x+\pi} = k_x + 1$. On a donc

$$\begin{aligned} E(x+\pi) &= (-1)^{k_x+1} E_0(x + \pi - (k_x + 1)\pi) \\ &= -(-1)^{k_x} E_0(x - k_x\pi) \\ &= -E(x) \end{aligned}$$

□

Proposition 13. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C(x+\pi) = -C(x)$ et $S(x+\pi) = -S(x)$.*

Démonstration. Immédiat par la proposition 12. □

Proposition 14. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(-x) = \overline{E(x)}$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-x - (-k_x)\pi \in [-\pi/2, \pi/2[$. Si $x - k_x\pi \neq \pi/2$, alors

$$E(-x) = (-1)^{-k_x} E_0(-x + k_x\pi) = (-1)^{-k_x} \overline{E_0(x - k_x\pi)} = \overline{E(x)}$$

Supposons maintenant que $x - k_x\pi = \pi/2$. On a alors $-x - (-k_x + 1)\pi = \pi/2$. De là,

$$\begin{aligned} E(-x) &= (-1)^{-k_x+1} E_0(-x - (-k_x + 1)\pi) \\ &= (-1)^{-k_x+1} \overline{E_0(x + (-k_x + 1)\pi)} \\ &= (-1)^{k_x+1} \overline{E_0(x - k_x\pi + \pi)} \\ &= -(-1)^{k_x+1} \overline{E_0(x - k_x\pi)} \\ &= (-1)^{k_x} \overline{E_0(x - k_x\pi)} \\ &= \overline{E(x)} \end{aligned}$$

□

Corollaire 15. *La fonction C est paire. La fonction S est impaire.*

Démonstration. C'est immédiat par la proposition 14. □

Proposition 16. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C(\pi - x) = -C(x)$ et $S(\pi - x) = S(x)$.*

Démonstration. En effet,

$$C(\pi - x) = -C(-x) = -C(x)$$

$$S(\pi - x) = -S(-x) = S(x)$$

□

2.4 Régularité

Parlons maintenant des propriétés de régularité des fonctions E, C et S.

Proposition 17. *E est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $I_k =]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$. Pour tout $x \in I_k$, $k_x = k$ et donc $E(x) = (-1)^k E_0(x - k\pi)$. La fonction E_0 est continue sur I_0, donc E est continue sur I_k. Remarquons que $E(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k E_0(\pi/2) = i(-1)^k$.

La fonction E_0 est continue en $\pi/2$, donc, lorsque x tend à gauche vers $\pi/2 + k\pi$, $E(x)$ tend vers $(-1)^k E_0(\pi/2) = i(-1)^k$. Regardons maintenant ce qui se

passe à droite. Pour tout $x \in]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[$, $k_x = k+1$ et donc $E(x) = (-1)^{k+1}E_0(x - (k+1)\pi)$. Lorsque x tend vers $\pi/2 + k\pi$, $x - (k+1)\pi$ tend vers $-\pi/2$. La fonction E_0 est continue en ce point, donc $E(x)$ tend vers $(-1)^{k+1}E_0(-\pi/2) = -i(-1)^{k+1} = i(-1)^k$. □

Proposition 18. *La fonction E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $E' = iE$.*

Démonstration. En reprenant les notations ci-dessus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, E est dérivable sur I_k et sur cet intervalle, $E' = iE$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in I_k$, $E'(x) = iE(x)$. Par la continuité de E, lorsque x tend à gauche vers $\pi/2 + k\pi$, $E'(x)$ tend vers $iE(\pi/2 + k\pi)$. La fonction E est donc dérivable à gauche en $\pi/2 + k\pi$, et

$$E'_g(\pi/2 + k\pi) = iE(\pi/2 + k\pi)$$

On fait de même à droite de $\pi/2 + k\pi$ en se plaçant sur l'intervalle I_{k+1}. □

Corollaire 19. *La fonction E est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Par la proposition précédente, une récurrence facile montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et

$$E^{(n)} = i^n E$$

□

Corollaire 20. *Les fonctions S et C sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $S' = C$ et $C' = -S$.*

Démonstration. Par la proposition 19 et son corollaire, on a immédiatement la régularité de S et C, ainsi que les relations $S' = C$ et $C' = -S$. □

Remarquons que la propriété $E' = iE$ est « presque » caractéristique de la fonction E.

Proposition 21. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f' = if$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda E$.*

Démonstration. Rappelons que $|E| = 1$ et donc que E ne s'annule pas. Soit $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\lambda(x) = f/E$. La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De $f = \lambda E$ on tire

$$f' = \lambda' E + \lambda E' = \lambda' E + i\lambda E = \lambda' E + if$$

Or, $f' = if$. On en déduit $\lambda' E = 0$. Comme E ne s'annule pas, $\lambda' = 0$ et donc λ est constante sur $\mathbb{R}$. □

2.5 Retour sur la périodicité

Quelle est la plus petite période des fonctions E, S et C ?

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, notons $\mathcal{T}(f)$ l'ensemble des périodes de f.

Proposition 22. *$\mathcal{T}(E) = \mathcal{T}(C) = \mathcal{T}(S) = 2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Les fonctions E, C et S sont périodiques, non constantes et continues. Leurs groupes de périodes sont donc des sous-groupes discrets de $\mathbb{R}$ non triviaux.

Commençons par la fonction S. Soit $\mathcal{T}(S) = a\mathbb{Z}$ le groupe des périodes de S, où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Comme 2π est une période de S, a divise 2π. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = 2\pi/n$. Supposons un instant que $n \geq 2$ (et donc $a \leq \pi$). On a alors

$$S\left(-\frac{\pi}{2} + a\right) = S\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Mais $-\pi/2$ et $-\pi/2 + a$ appartiennent à $[-\pi/2, \pi/2]$, donc

$$S_0\left(-\frac{\pi}{2} + a\right) = S_0\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

C'est impossible puisque S_0 croît strictement sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Ainsi,

$$\mathcal{T}(S) = 2\pi\mathbb{Z}$$

En corollaire, comme 2π est une période de E, on a aussi $\mathcal{T}(E) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Passons à la fonction C. Tout d'abord, $C' = -S$ donc C décroît strictement sur $[0, \pi/2]$.

Pour tout $x \in [\pi/2, \pi[$, $S(x) = S(\pi - x)$. or, $\pi - x \in]0, \pi/2]$ donc $C'(x) = -S(x) < 0$. La fonction C est donc aussi strictement décroissante sur $[\pi/2, \pi]$. Ainsi, C décroît strictement sur $[0, \pi]$. En reprenant les mêmes arguments que pour la fonction S, on obtient que $\mathcal{T}(C) = 2\pi\mathbb{Z}$. □

2.6 Morphisme

Voici sans aucun doute la propriété la plus importante de l'exponentielle.

Proposition 23. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $E(x + y) = E(x)E(y)$.*

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = E(x + y) - E(x)E(y)$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = E'(x + y) - E'(x)E(y) = i(E(x + y) - E(x)E(y)) = if(x)$$

Par la proposition 21, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda E$. Or,

$$f(0) = E(y) - E(0)E(y) = 0$$

On a donc $0 = \lambda E(0) = \lambda$, d'où $f = 0E = 0$. □

Le plus dur est fait. Le lecteur est sans doute impatient de montrer les formules de trigonométrie usuelles.

Corollaire 24. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} C(a+b) &= C(a)C(b) - S(a)S(b) \\ S(a+b) &= S(a)C(b) + C(a)S(b) \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$E(a+b) = C(a+b) + iS(a+b)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E(a)E(b) &= (C(a) + iS(a))(C(b) + iS(b)) \\ &= C(a)C(b) - S(a)S(b) + i(S(a)C(b) + C(a)S(b)) \end{aligned}$$

d'où, puisque $E(a+b) = E(a)E(b)$, le résultat. □

À partir de ces deux égalités, on obtient facilement toutes les autres formules « usuelles ». Laissons cela en exercice !

Terminons tout de même par une dernière propriété de symétrie des fonctions C et S.

Corollaire 25. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = S(x) \text{ et } S\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = C(x)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$E\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = E\left(\frac{\pi}{2}\right) E(-x) = i\overline{E(x)}$$

ou encore

$$C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + iS\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = i(C(x) - iS(x))$$

d'où le résultat. □

2.7 Quelques valeurs particulières

Donnons enfin quelques valeurs particulières des fonctions E, C et S.

Proposition 26. *On a le tableau de valeurs ci-dessous.*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$E(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	i

Démonstration. Nous avons déjà les valeurs de E en 0 et $\pi/2$. Soit $x = \pi/4$. On a $2x = \pi/2$ donc

$$E(x)^2 = E(2x) = E(\pi/2) = i$$

Posons $E(x) = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}_+$. On a $|E(x)|^2 = |i| = 1$ donc $a^2 + b^2 = 1$. De plus,

$$E(x)^2 = (a^2 - b^2) + 2iab = i$$

donc, en prenant la partie réelle, $a^2 - b^2 = 0$. Comme a et b sont positifs, $a = b$. En reportant, $a^2 + b^2 = 2a^2 = 1$, d'où $a = b = \sqrt{2}/2$.

Prenons maintenant $x = \pi/6$. On a $3x = \pi/2$ donc

$$E(x)^3 = E(3x) = E(\pi/2) = i$$

Posons $E(x) = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}_+$. On a $|E(x)|^3 = |i| = 1$ donc $a^2 + b^2 = 1$. De plus,

$$E(x)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3) = i$$

En prenant la partie réelle,

$$a(a^2 - 3b^2) = 0$$

Si $a = 0$ alors, comme $a^2 + b^2 = 1$, $b = 1$ et donc $E(x) = i$. Mais $i^2 = -i \neq i$, donc $a \neq 0$. On a donc $a^2 - 3b^2 = 0$. Comme $a^2 = 1 - b^2$, on en déduit $1 - 4b^2 = 0$ et donc $b = 1/2$, puis $a = \sqrt{3b^2} = \sqrt{3}/2$.

On obtient enfin $E(\pi/3)$ en remarquant que

$$E(\pi/3) = E(2\pi/6) = E(\pi/6)^2$$

□

Les valeurs de E fournissent évidemment les valeurs de C et S.

Proposition 27. *On a le tableau de valeurs ci-dessous.*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$S(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$C(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Le nombre 13 est un nombre magique. Pour que cet article ait 13 pages, terminons par une dernière valeur particulière. Pentagones, pentacles, quand on regarde le tableau ci-dessus on se demande vraiment pourquoi on y évite soigneusement le nombre $\pi/5$. Superstition ? Histoire de rester dans la magie, nous allons faire apparaître le nombre d'Or.

Proposition 28. *On a*

$$2C\left(\frac{\pi}{5}\right) = \varphi$$

où $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ *est le nombre d'Or.*

Démonstration. Soit $\omega = E(2\pi/5)$. On a

$$\omega^5 = E(2\pi/5)^5 = E(2\pi) = 1$$

et donc

$$0 = \omega^5 - 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1)$$

Comme $\omega \neq 1$,

$$\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

Comme $\omega^2\omega^3 = \omega^4\omega = 1$, on a $\omega^3 = \overline{\omega^2}$ et $\omega^4 = \overline{\omega}$. Ainsi,

$$2\mathrm{Re}(\omega^2) + 2\mathrm{Re}(\omega) + 1 = 0$$

ou encore

$$2C\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2C\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 = 0$$

Par le corollaire 24, $C(4\pi/5) = 2C(2\pi/5)^2 - 1$. Ainsi,

$$4C\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 2C\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

Nous avons là une équation du second degré. On en déduit

$$C\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, on a $C(2\pi/5) > 0$, donc

$$C\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Maintenant,

$$2C\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 - 1 = C\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

donc

$$C\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{8} = \frac{1}{4}(\varphi + 1) = \frac{1}{4}\varphi^2$$

Comme $C(\pi/5)^2 > 0$ on en déduit le résultat. □