$\nu_p(n!)$

Marc Lorenzi

6 mai 2022

Proposition 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit p un nombre premier.*

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

Démonstration. Posons $E = [\![1, n]\!]$. On a

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$$

où

$$E_k = \{x \in E : \nu_p(x) = k\}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \nu_p(n!) &= \sum_{x \in E} \nu_p(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{x \in E_k} \nu_p(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{x \in E_k} k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k|E_k| \end{aligned}$$

Posons maintenant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = \{x \in E : p^k \mid x\}$$

On a

- $F_{k+1} \subseteq F_k$.
- $E_k = F_k \setminus F_{k+1}$.

Ainsi,

$$|E_k| = |F_k| - |F_{k+1}|$$

De là,

$$\begin{aligned}
\nu_p(n!) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k|E_k| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} k(|F_k| - |F_{k+1}|) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} k|F_k| - \sum_{k\in\mathbb{N}} k|F_{k+1}| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} k|F_k| - \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (k-1)|F_k| \\
&= 0|F_0| + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (k-(k-1))|F_k| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} |F_k|
\end{aligned}$$

Que vaut le cardinal de F_k ? On a

$$F_k = \{p^k, 2p^k, \dots, \alpha p^k\}$$

où

$$\alpha p^k \leq x < (\alpha+1)p^k$$

On a donc $|F_k| = \alpha$, et il reste à remarquer que

$$\alpha \leq \frac{x}{p^k} < \alpha + 1$$

et donc

$$\alpha = \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor$$

□