

$$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12} ?$$

Marc Lorenzi

10 avril 2022

Cette égalité a fait couler beaucoup d'encre depuis qu'elle a été écrite par Ramanujan. De nombreux auteurs ont décrit de toutes aussi nombreuses méthodes pour « justifier » cette égalité injustifiable. Nous allons dans cet article décrire l'une de ces méthodes, qui fait partie de la grande famille des *méthodes de régularisation*.

1 La méthode de régularisation d'Abel

1.1 L'idée

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série de terme général complexe a_k . Supposons que la série soit divergente, c'est à dire que la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

soit une suite divergente. La méthode de régularisation d'Abel consiste à considérer, pour $\varepsilon > 0$, la série

$$g(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-k\varepsilon}$$

Comme $e^{-k\varepsilon}$ tend rapidement vers 0 lorsque k tend vers l'infini, la série ci-dessus, sous certaines conditions portant sur les a_k , a des chances de converger. Remarquons que si $k \in \mathbb{N}$ est fixé, lorsque ε tend vers 0, $a_k e^{-k\varepsilon}$ tend vers a_k .

Définition 1. La *somme au sens d'Abel* de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right)_{\mathcal{A}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g(\varepsilon)$$

Un petit commentaire s'impose. La somme au sens d'Abel de la série est

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k e^{-k\varepsilon}$$

On voit donc apparaître une « limite de limite ». Il est bien connu que l'on ne peut pas impunément intervertir deux limites. Ainsi, la valeur de la somme au sens d'Abel est *a priori* différente de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n a_k e^{-k\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

La méthode de régularisation d'Abel consiste en fait à attribuer comme valeur à une limite qui n'existe pas la valeur d'une autre limite qui, elle, existe.

1.2 La méthode d'Abel pour la somme des entiers naturels

Prenons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} k$ est évidemment une série divergente. Sa n^{e} somme partielle est

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini. Un petit espoir subsiste, c'est que cette série converge au sens d'Abel. Malheureusement, ce n'est pas le cas.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^n k e^{-kz}$$

Pour quelles valeurs de z la série de terme général $k e^{-kz}$ converge-t-elle ? Une condition nécessaire est que son terme général tende vers 0. Ceci oblige $e^{-kz} = (e^{-z})^k$ à tendre vers 0, et donc $|e^{-z}| < 1$, ou encore $|e^z| > 1$.

Inversement, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|e^z| > 1$. Posons

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^n e^{-kz}$$

de sorte que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h'_n(z) = -g_n(z)$.

Comme $|e^z| > 1$, on a $e^z \neq 1$. De là,

$$h_n(z) = \frac{1 - e^{-(n+1)z}}{1 - e^{-z}}$$

En dérivant par rapport à z , nous obtenons

$$h'_n(z) = \frac{-n e^{-(n+2)z} + (n+1) e^{-(n+1)z} - e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2}$$

Remarquons maintenant que

$$|n e^{-(n+2)z}| = \frac{n}{|e^z|^n} e^{-2z}$$

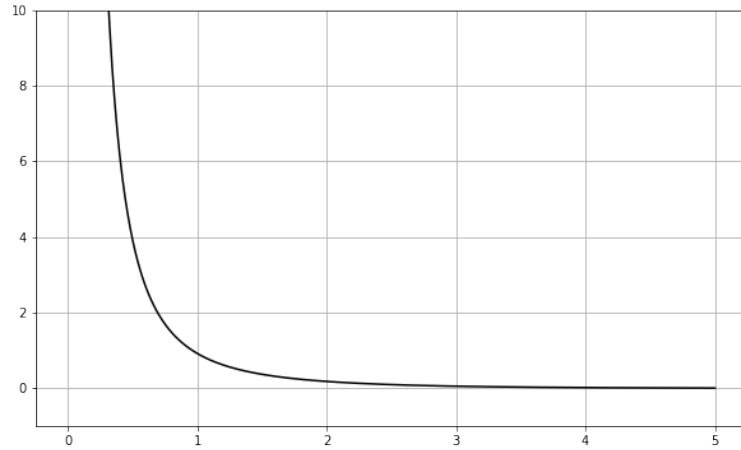
Lorsque n tend vers l'infini, cette quantité tend vers 0 (puissances comparées). De même, $(n+1)e^{-(n+1)z}$ tend vers 0. On en déduit que

$$g_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2}$$

La série de terme général ke^{-kz} est donc convergente, de somme

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-kz} = \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2}$$

Remarquons que $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. La condition $|e^z| > 1$ est donc équivalente à $\operatorname{Re} z > 0$. Pour tout réel $x > 0$, $g_n(x)$ converge donc lorsque n tend vers l'infini vers $g(x)$. Voici la courbe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.



Lorsque x tend vers 0, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Ainsi, la méthode de régularisation d'Abel échoue.

Nous allons dans ce qui suit utiliser une méthode de régularisation plus puissante que la méthode d'Abel. Cette méthode utilise des *oscillations amorties*.

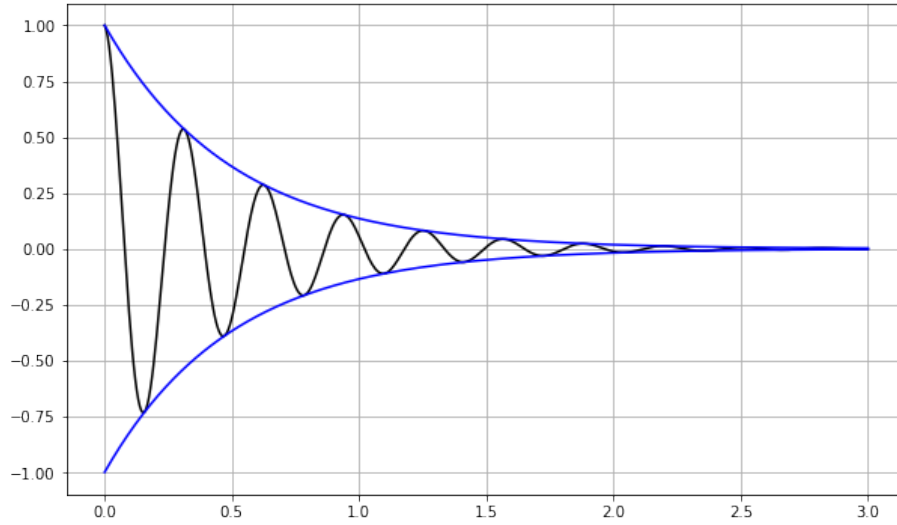
2 Oscillations amorties

2.1 Introduction

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons la fonction φ_k définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_k(x) = e^{-kx} \cos kx$$

Voici le graphe d'une telle fonction.



Les courbes bleues sont les graphes de $x \mapsto \pm e^{-kx}$, la fonction utilisée par la méthode de régularisation d'Abel. Nous allons quant à nous utiliser la courbe noire, en espérant que cette fois-ci la série associée convergera.

Pour tout entier naturel n et tout réel x , posons donc

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n k e^{-kx} \cos kx$$

Nous allons montrer que pour tout $x > 0$, $f_n(x)$ converge lorsque n tend vers l'infini. En appelant $f(x)$ la limite en question, nous montrerons ensuite que $f(x)$ a une limite réelle lorsque x tend vers 0.

2.2 Le calcul de $f(x)$

En utilisant les formules d'Euler, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos kx = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx})$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n k e^{-k(1-i)x} + \sum_{k=0}^n k e^{-k(1+i)x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (g_n((1-i)x) + g_n((1+i)x)) \end{aligned}$$

où la fonction g_n a été définie dans la première partie. Nous avons vu que la suite de terme général $g_n(z)$ converge pour tout z complexe tel que $\operatorname{Re} z > 0$. Pour tout réel x , la partie réelle de $(1-i)x$ et de $(1+i)x$ est x . Si $x > 0$, $f_n(x)$ converge donc lorsque n tend vers l'infini vers

$$f(x) = \frac{1}{2} (g((1-i)x) + g((1+i)x))$$

où, rappelons-le,

$$g(z) = \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2}$$

La valeur de $f(x)$ peut être calculée explicitement. On a

$$\begin{aligned} g((1-i)x) &= \frac{e^{-x}e^{ix}}{(1 - e^{-x}e^{ix})^2} \\ &= \frac{e^{-x}e^{ix}(1 - e^{-x}e^{-ix})^2}{(1 - e^{-x}e^{ix})^2(1 - e^{-x}e^{-ix})^2} \\ &= \frac{e^{-x}e^{ix}(1 - 2e^{-x}e^{-ix} + e^{-2x}e^{-2ix})}{(1 - 2e^{-x}\cos x + e^{-2x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}(e^{ix} - 2e^{-x} + e^{-2x}e^{-ix})}{(1 - 2e^{-x}\cos x + e^{-2x})^2} \end{aligned}$$

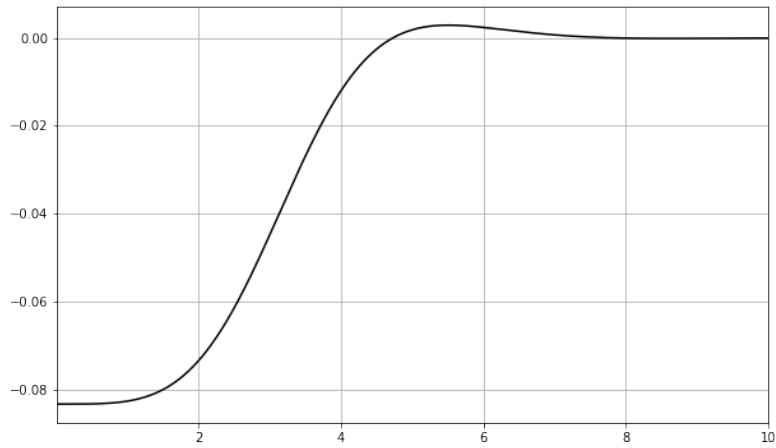
et de même,

$$g((1+i)x) = \frac{e^{-x}(e^{-ix} - 2e^{-x} + e^{-2x}e^{ix})}{(1 - 2e^{-x}\cos x + e^{-2x})^2}$$

On en déduit

$$f(x) = \frac{e^{-x}(\cos x - 2e^{-x} + e^{-2x}\cos x)}{(1 - 2e^{-x}\cos x + e^{-2x})^2}$$

Voici le graphe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.



Il semble que f tend vers une limite finie lorsque x tend vers 0. C'est ce que nous allons maintenant prouver.

3 Le comportement de f en 0

3.1 Un développement asymptotique de g en 0

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$,

$$g(z) = \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2}$$

Il n'est pas difficile, quoique un peu fastidieux, de faire un développement asymptotique de g en 0. Les coefficients de ce développement font intervenir des *nombre de Bernoulli*, mais le calcul peut être fait à la main, en utilisant un développement limité de l'exponentielle en 0. On obtient, à l'ordre 4,

$$g(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{12} + \frac{z^2}{240} - \frac{z^4}{6048} + o(z^4)$$

On retrouve ce que l'on avait déjà remarqué dans la première partie de l'article : à cause du terme $\frac{1}{z^2}$, $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque le réel x tend vers 0.

3.2 Un développement limité de f en 0

En remarquant que $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$, on obtient pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g((1-i)x) &= \frac{1}{-2ix^2} - \frac{1}{12} + \frac{-2ix^2}{240} - \frac{-4x^4}{6048} + o(x^4) \\ &= \frac{i}{2x^2} - \frac{1}{12} - \frac{ix^2}{120} + \frac{x^4}{1512} + o(x^4) \end{aligned}$$

et

$$g((1+i)x) = -\frac{i}{2x^2} - \frac{1}{12} + \frac{ix^2}{120} + \frac{x^4}{1512} + o(x^4)$$

En ajoutant et en divisant par 2, il vient

$$f(x) = -\frac{1}{12} + \frac{x^4}{1512} + o(x^4)$$

3.3 La limite de f en 0

Avec le développement limité ci-dessus, on obtient immédiatement que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{12}$$

4 Conclusion

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série éventuellement divergente de terme général complexe a_k . La méthode de régularisation par oscillations amorties consiste à considérer, pour $\varepsilon > 0$, la série

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-k\varepsilon} \cos k\varepsilon$$

Remarquons que pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, lorsque ε tend vers 0, $a_k e^{-k\varepsilon} \cos k\varepsilon$ tend vers a_k .

Définition 2. La *somme au sens des oscillations amorties* de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right)_{\mathcal{O}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon)$$

Nous avons donc montré le résultat suivant.

Proposition 1.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} k \right)_{\mathcal{O}} = -\frac{1}{12}$$

De façon définitive, ON N'A PAS $\sum_{k=0}^{\infty} k = -\frac{1}{12}$. La somme en question est égale à $+\infty$. Mais par une méthode de régularisation, nous avons montré que cette somme, *au sens des oscillations amorties*, vaut $-\frac{1}{12}$.

La méthode que nous avons décrite dans cet article a été introduite par K. Sugiyama dans un article daté de 2014, *Zeta function regularization of the sum of all natural numbers by damped oscillation summation method*.

L'article en question va plus loin que ce dont nous avons parlé. Il explique en particulier les raisons qui poussent à considérer des oscillations amorties, et pourquoi ce type précis d'oscillations est choisi. Cet article peut facilement être trouvé par une recherche sur Internet.