# Ensembles constructibles

Marc Lorenzi

22 octobre 2021

## 1 Constructibilité

### 1.1 Notion d'ensemble constructible

Définissons tout d'abord ce qu'est un ensemble constructible.

**Définition 1.** On définit par récurrence sur $n$ une suite $(R_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles en posant

- $R_0 = \emptyset$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = \mathcal{P}(R_n)$

On pose également

$$HF = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$$

Un ensemble $E$ est *héréditairement fini* lorsque $E \in HF$. Nous appellerons dans cet article les ensembles de $HF$ les ensembles *constructibles.*

Voici les premiers ensembles $R_n$.

- $R_0 = \emptyset$.
- $R_1 = \{\emptyset\}$
- $R_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $R_3 = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $R_4 = \{\emptyset, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$ $\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\},$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\},$ $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

**Proposition 1.**

- *$\emptyset$ est constructible.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $R_n$ est constructible.*

**Démonstration.**

- $\emptyset \in R_0 \subset HF$ donc $\emptyset$ est constructible.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $R_n \subseteq R_n$, donc $R_n \in \mathcal{P}(R_n) = R_{n+1} \subseteq HF$, donc $R_n$ est constructible.

□

**Remarque.** L'argument ci-dessous, que nous avons utilisé dans la preuve de la proposition précédente, sera d'un usage très fréquent dans la suite de l'article.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in HF$. On a

$$x \subseteq R_n \iff x \in R_{n+1}$$

**Proposition 2.** *Soit $E$ un ensemble constructible. Pour tout $x \in E$, $x$ est constructible.*

**Démonstration.** Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \in R_n$. Si $n = 1$, alors $E = \emptyset$ et la conclusion est évidente, puisque $E$ n'a pas d'élément. Si $n \geq 2$, comme $E \in R_n$, on a $E \subseteq R_{n-1}$ (remarque encadrée ci-dessus). Les éléments de $E$ sont donc des éléments de $R_{n-1}$, donc de $HF$. □

## 1.2 Le cardinal des $R_n$

Posons $2^{<0>} = 0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{<n+1>} = 2^{2^{<n>}}$, de sorte que

$$2^{<n>} = 2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}$$

où le nombre 2 apparaît $n$ fois dans l'expression.

**Lemme 3.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.*

**Démonstration.** On a $2^0 = 1 \geq 0 + 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} = 1 + n$$

□

**Lemme 4.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{<n>} \geq n$.*

**Démonstration.** Le minorant $n$ est un très mauvais minorant de $2^{<n>}$, mais il nous suffira. Montrons ce résultat par récurrence sur $n$.

On a $2^{<0>} = 0 \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $2^{<n>} \geq n$. On a alors

$$2^{<n+1>} = 2^{2^{<n>}} \geq 2^n \geq n + 1$$

□

**Proposition 5.**

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $R_n$ est fini et son cardinal est $|R_n| = 2^{<n>}$.*
- *L'ensemble $HF$ est infini dénombrable.*
- *Les ensembles constructibles sont des ensembles finis.*

**Démonstration.**

- La finitude des $R_n$ et la valeur de leur cardinal se prouvent par une récurrence immédiate sur $n$.
- L'ensemble $HF$, union dénombrable d'ensembles finis, est fini ou dénombrable. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n \subseteq HF$, donc, en supposant un court instant que $HF$ est fini, $|HF| \geq 2^{<n>} \geq n$, contradiction. Ainsi, $HF$ est infini.
- Soit $E$ un ensemble constructible. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \in R_n$. Si $n = 1$, alors $E = \emptyset$ et $E$ est fini. Sinon, $n \geq 2$ et alors $E \subseteq R_{n-1}$. Comme $R_{n-1}$ est fini, $E$ l'est aussi.

□

**Corollaire 6.** *$HF$ n'est pas constructible.*

**Démonstration.** En effet, les ensembles constructibles sont finis, et $HF$ est infini. □

## 1.3 Ensembles transitifs

**Définition 2.** Un ensemble $E$ est *transitif* lorsque

$$\forall x \in E, x \subseteq E$$

Dit autrement, l'ensemble $E$ est transitif lorsque les éléments des éléments de $E$ sont des éléments de $E$. C'est ce qui justifie la qualification de « transitif ». Remarquons que les éléments d'un ensemble transitif n'ont pas de raison d'être eux-mêmes transitifs. Prenons un exemple qui réapparaîtra plus tard. Définissons une suite $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ d'ensembles en posant $\sigma_0 = \emptyset$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_{n+1} = \{\sigma_n\}$. Posons aussi

$$\widehat{n} = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}\}$$

**Proposition 7.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{n}$ est transitif.*

**Démonstration.** C'est une récurrence facile sur $n$. □

**Proposition 8.** *Une réunion, une intersection, d'ensembles transitifs, sont des ensembles transitifs.*

**Démonstration.** Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles transitifs.

Soit $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Montrons que $E$ est transitif. Soit $x \in E$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in E_i$. Comme $E_i$ est transitif, $x \subseteq E_i$. Or, $E_i \subseteq E$ donc $x \subseteq E$.

Soit $F = \bigcap_{i \in I} E_i$. Montrons que $F$ est transitif. Soit $x \in F$. Soit $i \in I$. Soit $x \in E_i$. Comme $E_i$ est transitif, $x \subseteq E_i$. Ceci étant vrai pour tout $i \in I$, il en résulte $x \subseteq F$. $\square$

**Proposition 9.** *Soit $E$ un ensemble transitif. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est transitif.*

**Démonstration.** Soit $x \in \mathcal{P}(E)$. Soit $y \in x$. On a $x \subseteq E$, donc $y \in E$. Or $E$ est transitif, donc $y \subseteq E$, c'est à dire $y \in \mathcal{P}(E)$. $\square$

Les ensembles transitifs n'apparaissent jamais dans les mathématiques du quotidien, sauf évidemment lorsqu'on est un théoricien des ensembles. Trouver des exemples non triviaux de tels ensembles n'est pas si facile. Cela dit, nous en avons déjà trouvé beaucoup.

**Proposition 10.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n$ est transitif.*

**Démonstration.** C'est une récurrence immédiate sur $n$. Tout d'abord, $R_0 = \emptyset$ est transitif. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $R_n$ est transitif. Alors, par la proposition précédente, $R_{n+1} = \mathcal{P}(R_n)$ est transitif. $\square$

**Corollaire 11.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n \subseteq R_{n+1}$.*

**Démonstration.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in R_n$. Comme $R_n$ est transitif, $x \subseteq R_n$, c'est à dire $x \in R_{n+1}$. $\square$

**Corollaire 12.** *L'ensemble $HF$ est transitif.*

**Démonstration.** $HF$ est une réunion d'ensembles transitifs. $\square$

*$HF$ est donc un ensemble transitif infini dénombrable qui est la réunion d'une suite croissante d'ensembles transitifs finis (les $R_n$).*

## 1.4 Le rang d'un ensemble constructible

Un ensemble constructible $E$ est un ensemble d'ensembles ... d'ensembles. Combien y a-t-il, si j'ose dire, de points de suspension ? Il est bon de voir $E$ comme un objet bidimensionnel (un arbre, en fait). Le cardinal de $E$, c'est « l'épaisseur » de $E$. Il nous reste à définir une mesure de sa « profondeur ».

On associe à tout ensemble constructible un entier naturel qui, d'une certaine façon, mesure la profondeur de l'ensemble. Cet entier est appelé son *rang*.

**Définition 3.** Soit $E$ un ensemble constructible. Le *rang* de $E$ est l'entier

$$\mathrm{rg}\ E = \min\{n \in \mathbb{N},\ E \in R_{n+1}\}$$

Par exemple, $\text{rg } \emptyset = 0$ et $\text{rg } \{\emptyset\} = 1$.

**Remarque.** Par la croissance de la suite $(R_n)_{n \geq 0}$, on a une caractérisation simple du rang. Nous utiliserons très souvent cette caractérisation dans la suite.

Soit $E$ un ensemble constructible. $\text{rg } E$ est l'unique $r \in \mathbb{N}$ tel que $E \in R_{r+1} \setminus R_r$. On a donc, puisque la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ est croissante,

- Pour tout entier $k \leq r$, $E \notin R_k$
- Pour tout entier $k > r$, $E \in R_k$

**Proposition 13.** *Soit $E$ un ensemble constructible non vide. Alors*

$$\textit{rg } E = 1 + \max\{\textit{rg } x, x \in E\}$$

**Démonstration.** Posons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, où $n \geq 1$. Notons

$$m = \max(\text{rg } x_1, \ldots, \text{rg } x_n)$$

Si $m = 0$, alors $E = \{\emptyset\}$ et la conclusion est évidente. Supposons donc $m \geq 1$.

On a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in R_{m+1}$. De là, $E \subseteq R_{m+1}$ et donc $E \in R_{m+2}$. Ainsi, $\text{rg } E \leq m + 1$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\text{rg } x_k = m$. On a $x_k \notin R_m$ donc $E \not\subseteq R_m$, et donc $E \notin R_m$. Ainsi, $\text{rg } E \geq m + 1$. $\square$

**Proposition 14.** *La relation $\in$ est irréflexive sur $HF$ : pour tout ensemble constructible $E$, $E \notin E$.*

Cette proposition peut paraître curieuse. Après tout, comment un ensemble pourrait-il appartenir à lui-même ? Nous avons ici une preuve élémentaire de ce fait, dans le cadre des ensembles constructibles.

**Démonstration.** Pour tout $x \in E$, $\text{rg } x < \text{rg } E$, donc $\text{rg } x \neq \text{rg } E$, donc $x \neq E$. $\square$

**Proposition 15.** *La relation $\in$ est asymétrique sur $HF$ : pour tous ensembles constructibles $E$ et $F$, si $E \in F$ alors $F \notin E$.*

**Démonstration.** Supposons $E \in F$. Alors, $\text{rg } E < \text{rg } F$, donc $F \notin E$. $\square$

Plus généralement, le graphe de la relation $\in$ sur $HF$ ne contient pas de cycles. Il n'existe pas d'ensembles constructibles $X_0, \ldots, X_n$ tels que

$$X_0 \in X_1 \ldots \in X_n \in X_0$$

S

**Proposition 16.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, rg $R_n = n$.*

**Démonstration.** C'est clair si $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $R_n$ est constructible, $R_n \notin R_n$. Donc, rg $R_n \geq n$. De plus, $R_n \subseteq R_n$, donc $R_n \in R_{n+1}$. Donc, rg $R_n \leq n$. □

**Proposition 17.** *$HF$ n'est pas constructible.*

**Démonstration.** Nous le savions déjà, mais nous avons maintenant une preuve éclairante de ce résultat.

Supposons que $HF$ est constructible. On a donc

- $HF \in HF$ car $HF$ appartient à l'ensemble des ensembles constructibles.
- $HF \notin HF$ par la proposition 14.

Contradiction. □

**Proposition 18.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in HF$ un ensemble transitif de rang $n$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $A$ possède un élément de rang $k$.*

**Démonstration.** Montrons par récurrence descendante sur $k$ que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $A$ possède un élément de rang $k$. Comme $A$ est de rang $n$, $A$ possède un élément de rang $n-1$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons que $A$ possède un élément $X$ de rang $k$. $X$, de rang $k$, possède un élément $Y$ de rang $k-1$. Comme $A$ est transitif, $Y \in A$. □

**Proposition 19.** *Soit $A$ un ensemble constructible transitif. Alors,*

$$\text{rg } A \leq |A|$$

**Démonstration.** Soit $n = \text{rg } A$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $A$ possède un élément $X_k$ de rang $k$. Les $X - k$ ayant des rangs distincts, ils sont distincts. Ainsi, $|A| \geq n$. □

Remarquons qu'un ensemble constructible qui n'est pas transitif peut avoir un très petit cardinal et un très gros rang. Pour prendre un exemple extrême, nous avons défini plus haut par récurrence sur $n$ les ensembles $\sigma_n = \{\{\ldots\{\emptyset\}\ldots\}\}$.

**Proposition 20.** *On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, rg $\sigma_n = n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sigma_n| = 1$.*

**Démonstration.** Le résultat sur les cardinaux est évident. Prouvons par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, rg $\sigma_n = n$. Pour $n = 0$, c'est clair. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons rg $\sigma_n = n$. On a $\sigma_n \in R_{n+1}$, donc $\sigma_{n+1} = \{\sigma_n\} \in \mathcal{P}(R_{n+1}) = R_{n+2}$. Ainsi, rg $\sigma_{n+1} \leq n+1$. Par ailleurs, par l'hypothèse de récurrence, $\sigma_n \notin R_n$ donc $\sigma_{n+1} = \{\sigma_n\} \notin \mathcal{P}(R_n) = R_{n+1}$. Ainsi, rg $\sigma_{n+1} \geq n+1$. □

### 1.5 Parties finies de $HF$

Pour tout ensemble $E$, notons $\mathcal{P}_f(E)$ l'ensemble des parties finies de $E$.

**Proposition 21.** *$HF = \mathcal{P}_f(HF)$.*

**Démonstration.** Soit $E \in HF$. Alors $E$ est fini, et, par transitivité de $HF$, $E \subseteq HF$. Ainsi, $E \in \mathcal{P}_f(HF)$.

Inversement, soit $E \in \mathcal{P}_f(HF)$. Si $E$ est vide, on a $E \in HF$. Sinon, soit $r \geq 1$ le rang de $E$. Pour tout $x \in E$, on a rg $x \leq r - 1$, donc $x \in R_r$. Ainsi, $E \subseteq R_r$, donc $E \in R_{r+1} \subseteq HF$. $\square$

## 2 Opérations sur les ensembles constructibles

Nous allons maintenant passer en revue toutes les opérations ensemblistes usuelles et nous poser deux questions. Ces opérations préservent-elles la propriété de constructiblité ? Quel est le rang de l'ensemble obtenu ?

### 2.1 Parties

**Proposition 22.** *Soit $E$ un ensemble constructible. Soit $F \subseteq E$. Alors $F$ est constructible et*

$$\text{rg } F \leq \text{rg } E$$

**Démonstration.** Si $E = \emptyset$, le résultat est évident. Supposons donc $E \neq \emptyset$. On a $F \subseteq E \subseteq HF$. De plus, $E$ étant fini, $F$ l'est aussi, donc $F \in \mathcal{P}_f(HF) = HF$. Ainsi, $F$ est constructible. Comme $F \subseteq E$,

$$\text{rg } F = \max\{\text{rg } x, x \in F\} + 1 \leq \max\{\text{rg } x, x \in E\} + 1 = \text{rg } E$$

$\square$

**Proposition 23.** *Soit $E$ un ensemble constructible. Alors $\mathcal{P}(E)$ est constructible et*

$$\text{rg } \mathcal{P}(E) = \text{rg } E + 1$$

**Démonstration.** Pour tout $F \subseteq E$, $F$ est constructible, donc $\mathcal{P}(E) = \{F, F \subset E\}$ est une partie finie de $HF$. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ est constructible. De plus, pour tout $F \subseteq E$, rg $F \leq$ rg $E$, donc

$$\text{rg } \mathcal{P}(E) = \max\{\text{rg } F, F \subset E\} + 1 \leq \text{rg } E + 1$$

Enfin $E \in \mathcal{P}(E)$ donc

$$\text{rg } \mathcal{P}(E) = \max\{\text{rg } F, F \subseteq E\} + 1 \geq \text{rg } E + 1$$

$\square$

## 2.2 Paires

**Proposition 24.** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles constructibles. Alors l'ensemble $\{A, B\}$ est constructible et*

$$rg\ \{A, B\} = \max(rg\ A, rg\ B) + 1$$

**Démonstration.** L'ensemble $\{A, B\}$ est une partie finie de $HF$ donc $\{A, B\}$ est constructible. La formule donnant le rang de cet ensemble est une conséquence de la proposition 13. □

## 2.3 Réunion

**Proposition 25.** *Soit $E$ un ensemble constructible non vide. Alors $\bigcup_{x \in E} x$ est constructible, et*

$$rg \bigcup_{x \in E} X = \max\{rg\ x, x \in E\} = rg\ E - 1$$

**Démonstration.** La deuxième égalité est claire par la proposition 13.

Posons $F = \bigcup_{x \in E} x$. Si $E = \{\emptyset\}$, alors $F = \emptyset$ et la conclusion est immédiate. Sinon, $E$ contient un ensemble non vide et $F \neq \emptyset$. Plaçons-nous dans ce cas. On a donc rg $E \geq 2$.

Soit $n =$ rg $E - 1 = \max\{\text{rg } x, x \in E\} \geq 1$. Pour tout $x \in E$, $x \in R_{n+1}$ et donc $x \subseteq R_n$. Ainsi, $F \subseteq R_n$ d'où $F \in R_{n+1}$. On en déduit que $F$ est constructible et que rg $F \leq n$.

Soit $x \in E$ tel que rg $x = n$. Soit $y \in x$ tel que rg $y = n - 1$. On a $y \in F$ donc rg $F \geq n$. □

**Corollaire 26.** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles constructibles. Alors $A \cup B$ est constructible et*

$$rg\ (A \cup B) = \max(rg\ A, rg\ B)$$

**Démonstration.** En effet, $E = \{A, B\}$ est constructible. On conclut en utilisant la proposition précédente. □

## 2.4 Intersection

**Proposition 27.** *Soit $E$ un ensemble constructible non vide. Alors $\bigcap_{x \in E} x$ est constructible, et*

$$rg \bigcap_{x \in E} x \leq \min\{rg\ x, x \in E\}$$

Remarquons qu'ici on ne dispose que d'une inégalité pour le rang de l'intersection. Par exemple, l'intersection pourrait être vide, donc de rang 0, et ceci indépendamment du rang des éléments de $E$.

**Démonstration.** Soit $x_0 \in E$. On a $\bigcap_{x \in E} x \subseteq x_0$ donc l'intersection, sous-ensemble d'un ensemble constructible, est constructible. De plus,

$$\text{rg} \bigcap_{x \in E} x \leq \text{rg } x_0$$

et ceci est vrai pour tout $x_0 \in E$. $\square$

**Proposition 28.** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles constructibles. Alors $A \cap B$ est constructible et*

$$rg\ (A \cap B) \leq \min(rg\ A, rg\ B)$$

Même remarque que pour la proposition précédente. Remarquons aussi que le majorant ne peut pas être amélioré.

**Démonstration.** L'ensemble $E = \{A, B\}$ est constructible. On conclut en utilisant la proposition précédente. $\square$

## 2.5 Différence

**Proposition 29.** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles constructibles. Alors, $A \setminus B$ est constructible et*

$$rg\ (A \setminus B) \leq rg\ A$$

**Démonstration.** En effet, $A \setminus B \subseteq A$. On n'a même pas besoin de savoir que $B$ est constructible. $\square$

## 2.6 Clôture transitive

Un ensemble constructible peut fort bien ne pas être transitif. Néanmoins, on a le résultat suivant.

**Proposition 30.** *Soit $E$ un ensemble constructible. Il existe un unique ensemble constructible transitif $\overline{E}$ vérifiant la propriété suivante.*

*Pour tout ensemble constructible transitif $F$,*

$$E \subseteq F \iff \overline{E} \subseteq F$$

Remarquons que ceci entraîne que $E \subseteq \overline{E}$. L'ensemble $\overline{E}$ est ainsi le plus petit ensemble constructible transitif contenant $E$. On l'appelle la *clôture transitive* de $E$.

**Démonstration.** Pour montrer l'unicité, supposons que $\overline{E}$ et $\widehat{E}$ vérifient la propriété désirée. En appliquant la propriété à $\overline{E}$, et en prenant $F = \widehat{E}$, on obtient $\overline{E} \subseteq \widehat{E}$. En renversant les rôles des deux ensembles, on obtient $\widehat{E} \subseteq \overline{E}$.

Soit $r$ le rang de $E$. On a $E \in R_{r+1}$ donc $E \subseteq R_r$. Or, $R_r$ est constructible et transitif. Il existe donc au moins un ensemble constructible transitif qui contient $E$. Considérons l'ensemble $E'$ qui est l'intersection de tous les ensembles constructibles transitifs qui contiennent $E$.

- Clairement, $E \subseteq E'$.
- $E' \subseteq R_r$ donc $E'$ est fini et $E' \subseteq HF$. Ainsi, $E' \in \mathcal{P}_f(HF) = HF$. L'ensemble $E'$ est donc constructible.
- $E'$ est une intersection d'ensembles transitifs, c'est donc un ensemble transitif.
- Enfin, $E'$ est inclus dans tous les ensembles constructibles transitifs qui contiennent $E$, puisque c'est leur intersection.

On en déduit facilement l'équivalence. $\square$

**Proposition 31.** *Soit $E$ un ensemble constructible. On a rg $\overline{E} =$ rg $E$.*

**Démonstration.** Notons $r = \text{rg } E$. On a $E \in R_{r+1}$ donc $E \subseteq R_r$. Ainsi, $R_r$ est constructible, transitif et contient $E$. Par minimalité de $\overline{E}$, il en résulte $\overline{E} \subseteq R_r$ et donc $\overline{E} \in R_{r+1}$. Ainsi, rg $\overline{E} \leq r$.

Inversement, $E \subseteq \overline{E}$, donc rg $E = r \leq$ rg $\overline{E}$.

Finalement, rg $\overline{E} = r =$ rg $E$. $\square$

Cela signifie-t-il que la clôture transitive de $E$ n'est pas beaucoup plus grosse que $E$ ? En tout cas, elle a la même « profondeur ». Il en va tout autrement du cardinal de $\overline{E}$.

Par exemple, soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $E = \{R_n\}$. On a rg $E =$ rg $\overline{E} = n + 1$ et $|E| = 1$. Comme $R_n \in E$, $R_n \in \overline{E}$ et ainsi, puisque $\overline{E}$ est transitif, $R_n \subseteq \overline{E}$, d'où

$$|\overline{E}| \geq |R_n| = 2^{<n>}$$

La proposition ci-dessous donne quelques propriétés de la clôture transitive. Sa preuve est laissée en exercice.

**Proposition 32.**

- *Pour tout ensemble constructible $E$, $E = \overline{E}$ si et seulement si $E$ est transitif.*
- *Pour tout ensemble constructible $E$, $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.*
- *Pour tous ensembles constructibles $E$ et $F$, si $E \subseteq F$ alors $\overline{E} \subseteq \overline{F}$.*

Comment construire de façon effective la clôture transitive d'un ensemble constructible ? C'est ce que nous allons maintenant voir. Soit $E$ un ensemble constructible. Définissons par récurrence sur $n$ une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles constructibles en posant $E_0 = E$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n+1} = \bigcup_{x\in E_n} x$$

Dit autrement, $E_{n+1}$ est l'ensemble des éléments des éléments de $E_n$.

**Proposition 33.** *Soit $r$ le rang de $E$.*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n$ est constructible.*
- *Pour tout $n \geq r$, $E_n = \emptyset$.*
- *On a*

$$\overline{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n=0}^{r-1} E_n$$

**Démonstration.**

- Par la proposition 25, si $E$ est un ensemble constructible, alors $\bigcup_{x\in E} x$ est constructible. Une récurrence immédiate prouve donc que les $E_n$ sont constructibles.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $r_n$ le rang de $E_n$. On a $r_0 = \text{rg } E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $r_n > 0$, (c'est à dire $E_n \neq \emptyset$), en utilisant à nouveau la proposition 25,

$$r_{n+1} = \text{rg} \bigcup_{x\in E_n} x = \max\{\text{rg } x, x \in E_n\} = \text{rg } E_n - 1 = r_n - 1$$

  Il en résulte immédiatement que pour tout $n \leq \text{rg } E$, $r_n = \text{rg } E - n$, et que pour tout $n \geq \text{rg } E$, $E_n = \emptyset$ (et $r_n = 0$). On a donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n=0}^{r-1} E_n$$

- Notons $E' = \bigcup_{n=0}^{r-1} E_n$ et montrons que $\overline{E} = E'$. Tout d'abord, $E'$, réunion finie de parties finies de $HF$, est une partie finie de $HF$. Donc $E'$ est constructible.
  Soit $F$ un ensemble constructible transitif contenant $E$. Montrons que $E' \subseteq F$. Pour cela, montrons par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq F$. On a tout d'abord $E_0 = E \subseteq F$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $E_n \subseteq F$. Soit $y \in E_{n+1}$. Il existe $x \in E_n$ tel que $y \in x$. Par l'hypothèse de récurrence, $x \in F$. Mais $F$ est transitif, donc $y \in F$. Ainsi, $E_{n+1} \subseteq F$.
  Montrons enfin que $E'$ est transitif. Soit $x \in E'$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_n$. Soit $y \in x$. Par définition de $E_{n+1}$, on a $y \in E_{n+1}$ et donc $y \in E'$. Ainsi, $E'$ est transitif.
  Pour conclure, $E'$ est le plus petit ensemble constructible transitif contenant $E$. On a effectivement $E' = \overline{E}$.

□

# 3 Les entiers de von Neumann

Nous allons examiner dans cette section une famille d'éléments de $HF$ qui ont des propriétés plus qu'intéressantes : les *entiers de von Neumann.*

## 3.1 Successeur d'un ensemble

Pour tout ensemble $E$, appelons *successeur* de $E$ l'ensemble

$$E^+ = E \cup \{E\}$$

**Proposition 34.** *Soit $E$ un ensemble constructible. Alors, $E^+$ est constructible.*

**Démonstration.** $E$ étant constructible, $\{E\}$ est une partie finie de $HF$, donc $\{E\} \in HF$. La réunion de deux ensembles constructibles étant constructible, on a le résultat. □

On dispose donc de la fonction « successeur » $HF \longrightarrow HF$.

**Proposition 35.** *Soit $E$ un ensemble constructible. On a*

$$\text{rg } E^+ = \text{rg } E + 1$$

**Démonstration.** C'est évident si $E = \emptyset$. Supposons donc $E \neq \emptyset$. Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. On a

$$E^+ = \{x_1, \dots, x_n, E\}$$

De là,

$$\text{rg } E^+ = \max(\text{rg } x_1, \dots, \text{rg } x_n, \text{rg } E) + 1 = \text{rg } E + 1$$

puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, rg $x_i <$ rg $E$. □

**Proposition 36.** *La fonction successeur est injective.*

**Démonstration.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles constructibles. Supposons $E^+ = F^+$. Par la proposition précédente, rg $E$ = rg $F$. Soit $x \in E$. On a $x \in E^+$, donc $x \in F^+$, c'est à dire $x \in F$ ou $x = F$. Comme $x \in E$, on a rg $x <$ rg $E$, donc rg $x \neq$ rg $F$ d'où $x \neq F$. Ainsi, $x \in F$ d'où $E \subseteq F$. De même, $F \subseteq E$. □

**Remarque.** Nous avons dans la démonstration ci-dessus utilisé de façon cruciale la notion de rang. Démontrer l'injectivité de la fonction successeur pour des ensembles quelconques serait une tout autre histoire.

**Proposition 37.** *Le successeur d'un ensemble transitif est encore transitif.*

**Démonstration.** Soit $E$ un ensemble transitif. Soit $F = E^+$. Soit $x \in F$. On a donc $x \in E$ ou $x = E$. Soit maintenant $y \in x$. Si $x \in E$, par transitivité de $E$

on a $y \in E$. Si $x = E$, alors $y \in E$ trivialement. Ainsi, dans tous les cas, $y \in E$. Comme $E \subseteq F$, il en résulte que $y \in F$. Ainsi, $x \subseteq F$. □

## 3.2 Les entiers de von Neumann

**Définition 4.** La suite des *entiers de von Neumann* est la suite $(\overline{n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $HF$ définie par $\overline{0} = \emptyset$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{n+1} = \overline{n}^+$$

Voici les premiers entiers de von Neumann.

- $\overline{0} = \emptyset$
- $\overline{1} = \{\emptyset\}$
- $\overline{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\overline{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $\overline{4} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
- $\overline{5} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$

## 3.3 Quelques propriétés

**Proposition 38.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{n} = \{\overline{k}, 0 \leq k < n\}$$

**Démonstration.** Récurrence immédiate sur $n$. □

Nous avons donc en corollaire la propriété suivante.

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n \iff \overline{m} \in \overline{n}$$

**Proposition 39.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n} \in HF$, $\overline{n}$ est transitif et*

$$rg\ \overline{n} = n$$

**Démonstration.** C'est une récurrence immédiate sur $n$. □

**Corollaire 40.**

- *Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $\overline{m} = \overline{n} \iff m = n$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\overline{n}| = n$.*

**Démonstration.**

- Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Supposons $\overline{m} = \overline{n}$. On a alors rg $\overline{m} =$ rg $\overline{n}$, c'est à dire $m = n$. La réciproque est évidente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le point précédent, $\overline{0}$, …, $\overline{n-1}$ sont tous distincts et donc

$$|\overline{n}| = |\{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}| = n$$

□

## 3.4 Ensembles transitifs de cardinal minimal

Soit $A$ un ensemble transitif de rang $n$ et de cardinal $n$. On a par la proposition 18,

$$A = \{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$$

où les $X_k$ sont de rang $k$. Remarquons que $X_0$, de rang 0, est nécessairement $\emptyset$. De même, $X_1$ est le seul ensemble de rang 1, à savoir $\{\emptyset\}$.

À partir de $k = 2$, les choses se compliquent. On peut avoir $X_2 = \{\{\emptyset\}\} = \sigma_2$ ou $X_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \overline{2}$.

Pour tout $k \geq 1$, $X_k$ étant de rang $k$, il possède un élément de rang $k-1$. Par transitivité de $A$, $X_k \subseteq A$ et donc cet élément de rang $k-1$ ne peut être que $X_{k-1}$. Ainsi,

$$X_0 \in X_1 \in \ldots \in X_{n-1}$$

Remarquons également que comme $X_{k+1}, \ldots, X_{n-1}$ sont de rang strictement supérieur au rang de $X_k$, ils n'appartiennent pas à $X_k$. Ainsi, comme $X_k \subseteq A$,

$$X_k \subseteq \{X_0, \ldots, X_{k-1}\}$$

et donc $|X_k| \leq k$. Les conditions que nous venons d'énumérer sont en fait suffisantes.

**Proposition 41.** *Soit $A \in HF$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $A$ est transitif de rang $n$ et de cardinal $n$ si et seulement si $A = \{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$ où*

- *Les $X_k$ sont de rang $k$.*
- *$X_0 \in X_1 \in \ldots \in X_{n-1}$.*
- *Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $X_k \subseteq \{X_0, \ldots, X_{k-1}\}$.*

**Démonstration.** Nous avons déjà vu que ces conditions sont nécessaires. Inversement, supposons ces conditions réalisées.

- Le cardinal de $A$ est bien $n$.
- Le rang de $A$ est effectivement $n$.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. La troisième condition montre que $X_k \subseteq A$ et donc $A$ est transitif.

□

**Proposition 42.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe exactement $2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ ensembles transitifs de rang $n$ et de cardinal $n$.*

**Démonstration.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On construit un ensemble $A$ de rang $n$ et cardinal $n$ comme suit.

- Choix d'un élément $X_0$ de rang 0 : une possibilité.
- Pour tout $k \in [\![1, n-1$, supposant choisis $X_0, \dots, X_{k-1}$ : choix d'un élément $X_k$ de rang $k$ tel que $X_{k-1} \in X_k$ et $X_k \subseteq \{X_0, \dots, X_{k-1}\}$. Cela revient à choisir une partie de $\{X_0, \dots, X_{k-2}\}$. Il y a donc $2^{k-1}$ possibilités.

En appelant $T_n$ le nombre d'ensembles transitifs de rang $n$ et de cardinal $n$, on a donc

$$T_n = \prod_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)} = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

□

Voici donc le nombre d'ensembles transitifs de rang $n$ et de cardinal $n$ pour les premières valeurs de $n$.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 8 | 64 | 1024 |

## 3.5 Ensembles bitransitifs

Nous avons déjà vu que la relation $\in$ est irréflexive et asymétrique sur $HF$. En revanche, la relation $\in$ n'est pas transitive sur $HF$. Par exemple, $\emptyset \in \{\emptyset\}$ et $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ mais $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$. Ceci suggère une définition.

**Définition 5.** Soit $A \in HF$ un ensemble transitif. $A$ est *bitransitif* si la relation $\in$ est transitive sur $A$.

*Un ensemble $A \in HF$ est donc bitransitif si et seulement si il est transitif, et la relation $\in$ est un ordre strict sur $A$.*

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n}$ est bitransitif. En fait, nous allons montrer que les entiers de von Neumann sont les seuls ensembles bitransitifs de $HF$.

**Proposition 43.** *Soit $A \in HF$. $A$ est bitransitif si et seulement si $A$ est transitif et ses éléments sont aussi transitifs.*

**Démonstration.** Supposons que $A$ est transitif, ainsi que ses éléments. Soient $X, Y, Z \in A$. Supposons $X \in Y$ et $Y \in Z$. Comme $Z \in A$, $Z$ est transitif. Ainsi, comme $Y \in Z$, on a aussi $Y \subseteq Z$ et donc $X \in Z$.

Inversement, supposons $A$ bitransitif. Soit $Z \in A$. Soit $Y \in Z$. Soit $X \in Y$. Par transitivité de $A$, $X, Y \in A$. Par transitivité de $\in$, on a donc $X \in Z$. Ainsi, $Z$ est transitif. □

**Proposition 44.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n}$ est l'unique ensemble bitransitif de cardinal $n$.*

**Démonstration.** Nous avons déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n}$ est bitransitif. De plus, $\overline{n}$ est de cardinal $n$.

Montrons l'unicité par récurrence sur $n$. C'est évident pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que le seul ensemble bitransitif de cardinal $n$ est $\overline{n}$. Soit $A$ bitransitif de cardinal $n+1$. Soit $X$ un élément de $A$ de rang maximal. Posons $A' = A \backslash \{X\}$. Pour tout $Y \in A'$, $X \notin Y$ puisque rg $Y \leq$ rg $X$. Soit $Y \in A'$. Par transitivité de $A$, $Y \subseteq A$. De plus, $X \notin Y$, donc $Y \subseteq A'$. Ainsi, $A'$ est transitif. Les éléments de $A'$ sont des éléments de $A$ et $A$ est bitransitif, donc les éléments de $A'$ sont transitifs. Ainsi, $A'$ est bitransitif. Comme $|A'| = n$, l'hypothèse de récurrence entraîne que $A' = \overline{n}$. Ainsi,

$$A = \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}, X\}$$

Remarquons que les éléments de $A'$ sont de rangs $0, 1, 2, \ldots, n-1$. $X$ est de rang maximal dans $A$, donc rg $X \geq n-1$. Par la transitivité de $A$, $X \subseteq A$. De plus, $X \notin X$, donc $X \subseteq A'$.

Soit $r$ le rang de $X$. Si $r = 0$, alors $X = \emptyset$. Cela veut dire, comme $X$ est de rang maximal dans $A$, que $A = \{0\}$. Si $r \geq 1$, $X$ possède un élément de rang $r-1$, qui appartient à $A'$. Cet élément est donc $\overline{r-1}$. Par la transitivité de $X$, $\overline{r-1} \subseteq X$, et donc $\overline{0} \in X, \ldots, \overline{r-2} \in X$. De plus, comme tous les éléments de $X$ sont de rang strictement inférieur à $r$, $\overline{r} \notin X, \ldots, \overline{n-1} \notin X$. De là, comme $X \subseteq A'$,

$$X = \{\overline{0}, \ldots, \overline{r-1}\} = \overline{r}$$

Enfin, $X \notin A'$, donc $r \neq 0, 1, \ldots n-1$, donc $r \geq n$. Comme $X \subseteq A'$, il en résulte que $r = n$, et donc $X = \overline{n}$. Finalement,

$$A = \{\overline{0}, \ldots, \overline{n}\} = \overline{n+1}$$

□

**Corollaire 45.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n}$ est l'unique ensemble bitransitif de rang $n$.*

**Démonstration.** En effet, rg $\overline{n} = n$. □

## 3.6 Les axiomes de Peano

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers de von Neumann. Notons $s$ la restriction de la fonction successeur à $\mathcal{N}$. La fonction $s$ vérifie les propriétés suivantes :

- $s$ est injective.
- $s(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus \{\emptyset\}$.

On a le *théorème de démonstration par récurrence.*

**Proposition 46.** *Soit $P(E)$ une propriété dépendant de l'ensemble $E \in HF$. On suppose*

- $P(\emptyset)$.
- $\forall x \in \mathcal{N},\ P(x) \implies P(x^+)$.

*Alors,* $\forall x \in \mathcal{N},\ P(x)$.

**Démonstration.** Montrons par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(\overline{n})$.

- On a $P(\overline{0})$ puisque $\overline{0} = \emptyset$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(\overline{n})$. On a donc $P(\overline{n}^+)$. Or, $\overline{n}^+ = \overline{n+1}$.

□

On peut grâce à cette propriété définir une addition et une multiplication dans $\mathcal{N}$.

On définit par récurrence sur $n$ la somme des deux entiers de von Neumann $x$ et $\overline{n}$ par

- $x \oplus \emptyset = x$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \oplus \overline{n}^+ = (x \oplus \overline{n})^+$.

On définit ensuite par récurrence sur $n$ le produit des deux entiers de von Neumann $x$ et $\overline{n}$ par

- $x \otimes \emptyset = \emptyset$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \otimes \overline{n}^+ = (x \otimes \overline{n}) \oplus x$.

On pose enfin, pour tous entiers de von Neumann $x$ et $y$,

$$x < y \iff x \in y$$

On peut poursuivre et définir une relation de divisibilité, puis développer un modèle complet de l'arithmétique à l'intérieur de l'univers $HF$ et voir que ce modèle satisfait tous les théorèmes usuels de l'arithmétique. Par exemple, tout entier de von Neumann strictement supérieur à $\overline{1}$ s'écrit de façon unique comme un produit d'entiers de von Neumann premiers. On laisse le lecteur habile se lancer dans l'aventure.

*Remarquons toutefois que $\mathcal{N}$, ensemble infini, n'est pas un ensemble constructible. Ainsi, dans l'univers $HF$, on peut parler des entiers naturels mais on ne peut pas considérer l'ensemble des entiers naturels.*

# 4 L'univers des ensembles constructibles

Nous allons dans cette section montrer que $HF$ est presque un *modèle* de la théorie des ensembles. Nous continuons à appeler « ensembles » les ensembles usuels. Nous appellerons « $HF$-ensembles » les ensembles constructibles, c'est à dire les éléments de $HF$.

Nous allons passer en revue un après l'autres les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix et axiome de fondation, notée $ZFC$. Nous allons voir que tous ces axiomes sont satisfaits dans l'univers $HF$, *sauf l'un d'entre eux.*

## 4.1 L'axiome d'extensionalité

**Proposition 47.** *Si deux $HF$-ensembles ont les mêmes éléments, alors ils sont égaux.*

**Démonstration.** Un $HF$-ensemble est aussi un ensemble. $\square$

## 4.2 L'axiome de la paire

L'axiome de la paire affirme qu'étant donnés deux ensembles $x$ et $y$, on peut former la paire $\{x, y\}$. Plus précisément, cet axiome affirme qu'il existe un ensemble qui contient $x$ et $y$. Un autre axiome (le schéma d'axiomes de compréhension) permet alors de montrer l'existence de la paire $\{x, y\}$.

Bien entendu, nous savons que cela est vrai pour les ensembles « normaux ». Il s'agit de prouver que cela est encore vrai pour les $HF$-ensembles. Et c'est immédiat.

**Proposition 48.** *Soient $x$ et $y$ deux $HF$-ensembles. Il existe un $HF$-ensemble $z$ tel que $x \in z$ et $y \in z$.*

**Démonstration.** Il suffit de prendre $z = \{x, y\}$, nous avons déjà vu que $z$ est un $HF$-ensemble. $\square$

## 4.3 Le schéma d'axiomes de compréhension

Pourquoi un *schéma* d'axiomes et pas un axiome ? Parce que qui suit donne, pour chaque formule logique $\varphi$, un axiome. Nous avons donc une infinité potentielle d'axiomes.

**Proposition 49.** *Soit $z$ un $HF$-ensemble. Pour toute formule logique $\varphi$ ne contenant pas $y$ comme variable libre, il existe un $HF$-ensemble $y$ tel que*

$$\forall x \in HF, x \in y \iff x \in z \text{ et } \varphi(x)$$

**Démonstration.** Soit $y = \{x \in z, \varphi(x)\}$. On a $y \subset z$. Comme $z \in HF$, on a aussi $y \in HF$ et $y$ répond clairement à la question. $\square$

Revenons un court instant à l'axiome de la paire. Soient $x$ et $y$ deux $HF$-ensembles. Soit $z$ un $HF$ ensemble contenant $x$ et $y$. Si nous considérons la formule logique $\varphi = (t = x) \vee (t = y)$, le schéma d'axiomes de compréhension permet de créer le $HF$-ensemble

$$\{t \in z, (t = x) \vee (t = y)\}$$

qui n'est autre que la paire $\{x, y\}$.

## 4.4 L'axiome de la réunion

**Proposition 50.** *Soit $E$ un $HF$-ensemble. Il existe un $HF$-ensemble $F$ tel que*

$$\forall y \in HF, (\exists x \in E, y \in x \implies y \in F)$$

**Démonstration.** Il suffit de prendre $F = \bigcup_{x \in E} x$, nous avons déjà vu que $F$ est un $HF$-ensemble. □

## 4.5 L'axiome de fondation

L'axiome de fondation est un axiome un peu à part. Les mathématiciens ne l'utilisent pas dans leur pratique quotidienne. Nous ne détaillerons pas, mais cet axiome équivaut au fait qu'il n'existe pas de suite infinie $(E_n)_{n \geq 0}$ d'ensembles telle que

$$\ldots \in E_2 \in E_1 \in E_0$$

Libellé de façon plus simple, cela donne

**Proposition 51.** *Soit $x$ un $HF$-ensemble non vide. Alors il existe $y \in x$ tel que pour tout $z \in y$, $z \notin x$.*

**Démonstration.** Soit $y$ un élément de $x$ de rang minimal. Pour tout $z \in y$, on a $\mathrm{rg}\ z < \mathrm{rg}\ y$ et donc, par minimalité de $\mathrm{rg}\ y$, $z \notin x$. □

## 4.6 Le schéma d'axiomes de remplacement

Comme le schéma d'axiomes de compréhension, le schéma d'axiomes de remplacement consiste en une infinité d'axiomes, un pour chaque formule logique.

**Proposition 52.** *Soit $A$ un $HF$-ensemble. Soit $\varphi$ une formule logique ne contenant pas la variable $B$ libre et telle que*

$$\forall x \in A, \exists!\ y \in HF, \varphi(x, y)$$

*Alors, il existe un $HF$-ensemble $B$ tel que*

$$\forall x \in A, \exists y \in B, \varphi(x, y)$$

**Démonstration.** Pour tout $x \in A$, notons $\psi(x)$ l'unique $y \in HF$ tel que $\varphi(x, y)$. Considérons

$$B = \{\psi(x), x \in A\}$$

L'ensemble $B$ est fini, puisque $A$ l'est. De plus, $B \subset HF$. $B$ est donc une partie finie de $HF$, donc $B$ est un $HF$-ensemble, qui vérifie la propriété voulue. □

## 4.7 L'axiome des parties

**Proposition 53.** *Soit $x$ un $HF$-ensemble. Il existe un $HF$-ensemble $y$ tel que*

$$\forall z \in HF, z \subseteq x \implies z \in y$$

**Démonstration.** Il suffit de prendre $y = \mathcal{P}(x)$. Nous avons déjà vu que $y$ est un $HF$-ensemble.

□

## 4.8 L'axiome du choix

Dans l'univers des $HF$-ensembles , on peut *montrer* l'axiome du choix. Cet axiome peut s'écrire sous bien des formes. Nous avons choisi la suivante : si l'on dispose d'un ensemble $F$ dont les éléments sont des ensembles non vides qui sont disjoints deux à deux, on peut alors choisir dans chacun de ces ensembles un élément, et les éléments choisis forment un ensemble $C$. Plus formellement,

**Proposition 54.** *Soit $F$ un $HF$-ensemble ne contenant pas $\emptyset$. On suppose que pour tous $x, y \in F$, $x \cap y = \emptyset$. Alors, il existe un $HF$-ensemble $C$ tel que pour tout $x \in F$, $C \cap x$ est un singleton.*

**Démonstration.** Montrons le résultat par récurrence sur le cardinal de $F$. Si $F$ est vide, le résultat est trivial. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai pour les $HF$-ensembles $F$ de cardinal $n$. Soit $F$ un $HF$-ensemble de cardinal $n+1$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Soit $x_0 \in F$. Posons $F' = F \setminus \{x_0\}$. Comme $F' \subseteq F$, on a $F' \in HF$. L'ensemble $F'$ est un $HF$-ensemble de cardinal $n$ qui vérifie les hypothèses de l'énoncé. Par l'hypothèse de récurrence, il existe donc un ensemble $C'$ tel que pour tout $x \in F'$, $C' \cap x$ est un singleton.

L'ensemble $x_0$ est non vide, puisque $\emptyset \notin F$. Soit $a \in x_0$. Soit $C = C' \cup \{a\}$. Soit $x \in F$. Si $x \neq x_0$, alors, $x \cap x_0 = \emptyset$ et donc $x \cap C = x \cap C'$ est un singleton. Si $x = x_0$ alors, par le même raisonnement, $x \cap C = \{a\}$ est aussi un singleton. □

*Remarquons que nous avons montré que l'axiome du choix est valide dans l'univers $HF$, sans utiliser l'axiome du choix « classique ».*

## 4.9 L'axiome de l'infini

L'axiome de l'infini peut être formulé de différentes façons équivalentes, la plus simple pour nous étant :

$$\exists x \in HF, \emptyset \in x \wedge \forall y \in x, y^+ \in x$$

**Proposition 55.** *L'axiome de l'infini n'est pas vérifié dans l'univers $HF$.*

**Démonstration.** Supposons qu'un tel $HF$-ensemble $x$ existe. Par une récurrence facile, $x$ contient tous les entiers de von Neumann, donc $\mathcal{N} \subseteq x$, donc $\mathcal{N} \in HF$ et nous avons vu que ce n'était pas le cas. □

# 5 Bilan

Étant donnée une théorie $\mathcal{T}$ donnée (c'est à dire un ensemble d'axiomes), notons $Cons(\mathcal{T})$ lorsque la théorie est *consistante*, c'est à dire qu'il n'existe aucune preuve formelle, à partir des axiomes de $\mathcal{T}$, d'une formule du type $\varphi \wedge \neg\varphi$. Nous venons de montrer

Qu'avons-nous montré ? Nous avons supposé qu'il existe un univers dans lequel tous les axiomes de la théorie des ensembles (sauf l'axiome de fondation et l'axiome du choix) étaient vérifié. Les puristes diraient que nous avons supposé $Cons(ZF^-)$.

Nous avons alors démontré que dans l'univers $HF$, tous les axiomes de la théorie des ensembles sont vérifiés, choix et fondation compris, *sauf* l'axiome de l'infini. L'univers $HF$ est ce que les mathématiciens appellent un modèle de la théorie $ZFC - Inf$. Un célèbre théorème de logique affirme qu'une théorie est consistante si et seulement si elle possède un modèle. Nous avons ainsi montré $Cons(ZFC - Inf)$. Ainsi,

**Théorème 56.**
$$Cons(ZF^-) \implies Cons(ZFC - Inf)$$

Ceci n'est pas la fin de l'histoire. Si nous notons plus précisément $R_\omega = HF$, rien ne nous empêche de considérer $R_{\omega+1} = \mathcal{P}(R_\omega)$, puis $R_{\omega+2} = \mathcal{P}(R_{\omega+1}), \ldots,$ $R_{\omega\times 2} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{\omega+n}$, et *ainsi de suite*. Je ne creuserai pas le « ainsi de suite », qui nécessite la connaissance de la théorie des *ordinaux transfinis*. On obtient par ce procédé un univers $\mathcal{V}$ horriblement plus gros que l'univers $HF$ que nous avons considéré dans cet article. Gros comment ? *Très* gros. Si l'on appelle $\mathcal{U}$ l'univers de tous les ensembles, alors l'axiome de fondation permet de montrer que
$$\mathcal{V} = \mathcal{U}$$
$\mathcal{V}$ contient donc *tous* les ensembles.