Les fonctions puissances

Résumé

On détaille dans ce document la construction des puissances d'un nombre réel. Puissances entières positives, négatives, racines nièmes, puissances rationnelles et enfin puissances quelconques. Chaque type de puissance a un ensemble de définition qui lui est propre ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$), mais toutes partagent les mêmes propriétés.

1 Puissances entières

1.1 Puissances positives

Definition 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence sur l'entier naturel n le réel x^n :

- $x^0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$.

Remarquons que $x^1 = x$.

1.2 Propriétés des puissances

Proposition 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(xy)^n = x^n y^n$$

Démonstration. Montrons l'égalité par récurrence sur n.

- On a $(xy)^0 = 1 = x^0 y^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $(xy)^n = x^n y^n$. On a alors

$$\begin{aligned}
(xy)^{n+1} &= (xy)^n (xy) \\
&= x^n y^n xy && \text{[HR]} \\
&= x^n x y^n y \\
&= x^{n+1} y^{n+1}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

Démonstration. Montrons l'égalité par récurrence sur n.

- On a $x^{m+0} = x^m = x^m x^0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $x^{m+n} = x^m x^n$. On a alors

$$\begin{aligned} x^{m+(n+1)} &= x^{(m+n)+1} \\ &= x^{m+n} x \\ &= x^m x^n x && \text{[HR]} \\ &= x^m x^{n+1} \end{aligned}$$

□

Proposition 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Démonstration. Montrons l'égalité par récurrence sur n.

- On a $x^{m \times 0} = x^0 = 1 = (x^m)^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $x^{mn} = (x^m)^n$. On a alors

$$\begin{aligned} x^{m(n+1)} &= x^{mn+m} \\ &= x^{mn} x^m \\ &= (x^m)^n x^m && \text{[HR]} \\ &= (x^m)^{n+1} \end{aligned}$$

□

1.3 Puissances négatives

Soit $x \neq 0$. On pose $x^{-1} = \frac{1}{x}$. On a en particulier, pour tous $x, y \neq 0$,

$$(xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$

À partir de là, on définit pour tout $n \in \mathbb{Z}_-^*$,

$$x^n = \left(x^{-n}\right)^{-1}$$

En passant à l'inverse, on voit que cette égalité reste vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a aussi pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$x^{-n} = (x^n)^{-1}$$

Les propriétés que nous avons vues pour les puissances entières positives restent vérifiées pour les puissances négatives, à condition évidemment d'être appliquées à des réels non nuls.

Lemme 4. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $1^n = 1$.

Démonstration. C'est une récurrence évidente pour $n \in \mathbb{N}$, et un passage à l'inverse tout aussi évident pour $n < 0$. □

Proposition 5. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$(xy)^n = x^n y^n$$

Démonstration. Le résultat est déjà connu lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Prenons donc $n < 0$. On a

$$(xy)^n = ((xy)^{-n})^{-1} = (x^{-n}y^{-n})^{-1}$$

L'inverse d'un produit étant le produit des inverses on en déduit le résultat. □

Lemme 6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $x^{m+1} = x^m \times x$.

Démonstration. C'est vrai par définition des puissances lorsque $m \in \mathbb{N}$. Prenons $m \leq -1$. On a $-m = (-m-1)+1$ et $-m-1 \in \mathbb{N}$. De là

$$x^{-m} = x^{-m-1}x$$

d'où

$$x^{-m}x^{-1} = x^{-m-1}$$

On passe à l'inverse pour obtenir l'égalité voulue. □

Proposition 7. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. On a

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Montrons d'abord par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{m+n} = x^m x^n$. La démonstration utilise le lemme ci-dessus, elle est en tous points analogue à celle faite pour les puissances positives.

- On a $x^{m+0} = x^m = x^m x^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $x^{m+n} = x^m x^n$. On a alors

$$x^{m+(n+1)} = x^{(m+n)+1} = x^{m+n}x = x^m x^n x = x^m x^{n+1}$$

Montrons maintenant que l'égalité reste vraie lorsque $n < 0$. On a $(m+n)+(-n) = m$ et $-n \in \mathbb{N}$. Donc

$$x^m = x^{m+n}x^{-n}$$

Multiplions des deux côtés de l'égalité par $(x^{-n})^{-1}$, c'est à dire par x^n. Il vient

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

□

Lemme 8. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = x^{-n}$.

Démonstration. En effet,

$$x^n(x^{-1})^n = (xx^{-1})^n = 1^n = 1$$

D'où le résultat en multipliant par x^{-n}. L'égalité $(x^n)^{-1} = x^{-n}$ a quant à elle déjà été vue. □

Proposition 9. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. On a

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Démonstration. On peut par exemple considérer 5 cas.

- Si m ou n est nul c'est évident.

- Si $m, n > 0$ on a déjà prouvé le résultat.
- Si $m > 0$ et $n < 0$, on a

$$(x^m)^n = ((x^m)^{-n})^{-1} = (x^{-mn})^{-1} = x^{mn}$$

- Si $m < 0$ et $n > 0$, on a

$$(x^m)^n = ((x^{-m})^{-1})^n = (x^{-m})^{-n}$$

  et on est ramenés au cas précédent.
- Si $m < 0$ et $n < 0$, on a

$$(x^m)^n = ((x^m)^{-1})^{-n}$$

  et on est ramenés au cas précédent.

□

1.4 Dérivabilité

Proposition 10. La fonction $\varphi_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sur $\mathbb{R}^*$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_-^*$. Sa dérivée est donnée, pour tout $n \neq 0$, par

$$\varphi_n'(x) = nx^{n-1}$$

Démonstration. La fonction $\varphi_0 : x \mapsto x^0 = 1$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons φ_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\varphi_n'(x) = nx^{n-1}$. On a pour tout réel x, $\varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x)$. La fonction φ_{n+1} est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout réel x

$$\varphi_{n+1}'(x) = x\varphi_n'(x) + \varphi_n(x) = x \times nx^{n-1} + x^n = (n+1)x^n$$

Passons aux entiers négatifs. Soit $n < 0$. On a pour tout $x \neq 0$,

$$\varphi_n(x) = x^n = \frac{1}{\varphi_{-n}(x)}$$

La fonction φ_{-n} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et ne s'y annule pas. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ de même. Par composition, la fonction φ_n l'est aussi, et on a pour tout $x \neq 0$,

$$\varphi_n'(x) = -\frac{\varphi_{-n}'(x)}{\varphi_{-n}(x)^2} = -\frac{(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}$$

□

1.5 Représentations graphiques

Voici les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

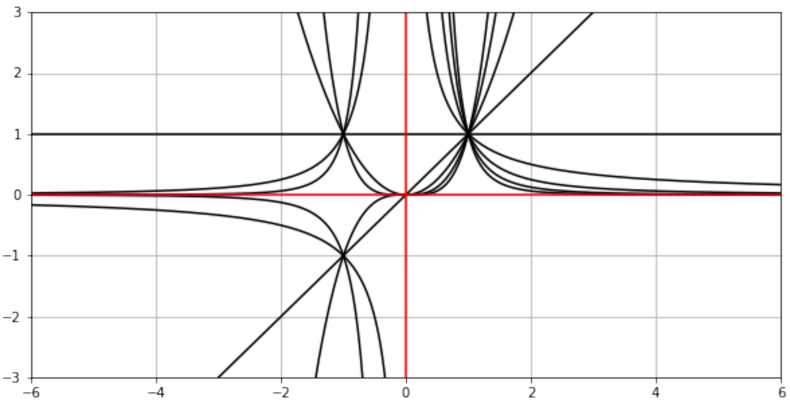


Figure 1 – Puissances entières

2 Puissances rationnelles

2.1 Racine nième

2.1.1 Le cas n pair

Definition 2. Soit n un entier naturel pair, $n \geq 2$. La fonction $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi_n(x) = x^n$ est une bijection continue strictement croissante. Sa réciproque $\psi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est donc encore une bijection continue strictement croissante. On l'appelle la fonction *racine nième* et on la note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ou $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$.

Les égalités $\varphi_n \circ \psi_n = \psi_n \circ \varphi_n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ signifient que pour tout $x \geq 0$

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x$$

Comme $\varphi_n'(0) = 0$, ψ_n n'est pas dérivable en $\varphi_n(0) = 0$. Cependant, φ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à dérivée strictement positive, donc ψ_n est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x > 0$,

$$\psi_n'(x) = \frac{1}{\varphi_n'(\psi_n(x))} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}} x^{-1}$$

Lorsque nous aurons défini les puissances rationnelles quelconques, nous pourrons écrire que cette quantité vaut $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

2.1.2 Le cas n impair

Passons le cas $n = 1$: la fonction racine 1ème est l'identité de $\mathbb{R}$. Supposons donc n impair, $n \geq 3$.

Cette fois ci, $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie ce qui a été dit dans le cas n pair. On dispose donc de la fonction racine $n$ième, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 11. Soient m, n deux entiers naturels non nuls. On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$

- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.

Si n est impair, le premier point est vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si m et n sont impairs, le second point est vérifié pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Les racines nièmes ne sont que des cas particuliers de puissances rationnelles. Nous ne perdons donc pas de temps à prouver cette proposition, nous la montrerons un peu plus loin dans un cadre plus général.

2.2 Représentations graphiques

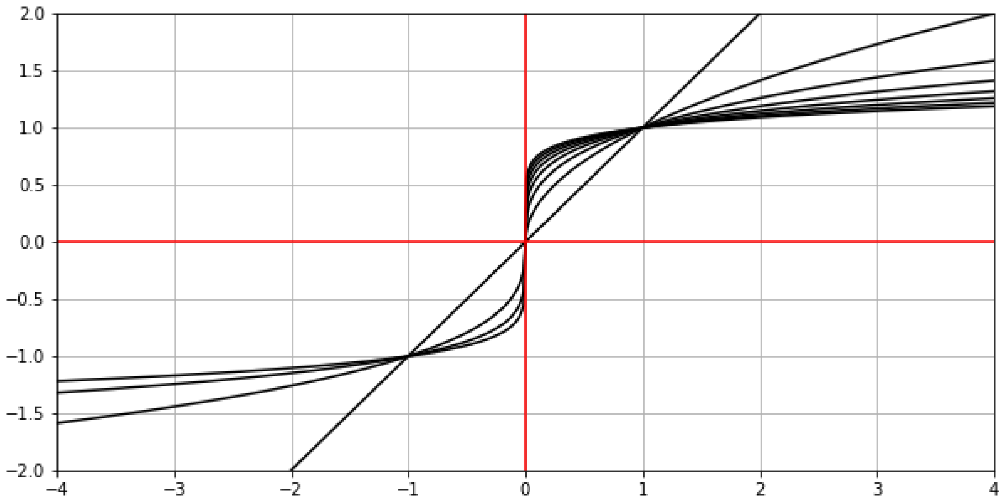


Figure 2 – Racines nièmes

2.3 Puissances rationnelles d'un réel positif

Nous allons définir x^α pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ et tout réel x *strictement positif.*

Definition 3. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. Posons $\alpha = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $x > 0$,

$$x^\alpha = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

Proposition 12. Cette quantité ne dépend pas des entiers p et q choisis pour représenter α.

Démonstration. Supposons $\alpha = \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, c'est à dire $ps = qr$. Soit $x > 0$. Soient $y = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ et $z = (x^r)^{\frac{1}{s}}$. On a, par les propriétés des puissances entières,

$$y^{qs} = \left(\left((x^p)^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^s = (x^p)^s = x^{ps}$$

De même,

$$z^{qs} = x^{qr} = y^{qs}$$

Comme l'application $t \mapsto t^{qs}$ est injective, on en déduit $y = z$. $\square$

Remarque. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, on retrouve la définition habituelle de puissance.

Proposition 13. Pour tous $x, y > 0$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$,

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta, (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$$

Démonstration. Posons $\alpha = \frac{p}{q}$ et $\beta = \frac{r}{s}$, où $p, r \in \mathbb{Z}$ et $q, s \in \mathbb{N}^*$.

- On a
$$\left(x^{\alpha+\beta}\right)^{qs} = \left(x^{\frac{ps+qr}{qs}}\right)^{qs} = x^{ps+qr}$$
et, par les propriétés des puissances entières,
$$\left(x^\alpha x^\beta\right)^{qs} = (x^\alpha)^{qs}\left(x^\beta\right)^{qs} = x^{ps}x^{qr} = x^{ps+qr}$$
Par injectivité de $t \mapsto t^{qs}$, on en déduit
$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$
- On a
$$\left(x^{\alpha\beta}\right)^{qs} = \left(x^{\frac{pr}{qs}}\right)^{qs} = x^{pr}$$
Par ailleurs
$$\left((x^\alpha)^\beta\right)^{qs} = \left(\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{rq} = x^{pr}$$
Comme dans le premier point, un argument d'injectivité montre que $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
- On a
$$((xy)^\alpha)^q = (xy)^p = x^p y^p$$
Par ailleurs
$$(x^\alpha y^\alpha)^q = x^{\alpha q}y^{\alpha q} = x^p y^p$$
d'où $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ par l'injectivité de $t \mapsto t^q$.

$\square$

Proposition 14. Soit $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration. Posons $\alpha = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x > 0$, $f(x) = (x^p)^{\frac{1}{q}}$. La fonction f est donc dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. De plus,

$$f'(x) = \frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} px^{p-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-p+p-1} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\square$

2.4 Extension à $\mathbb{R}_-$

Est-il possible de définir x^α pour $x < 0$, comme nous l'avons fait pour la racine $n$ième lorsque n est impair ? C'est effectivement le cas mais il faut prendre quelques précautions. Prenons juste un exemple pour comprendre le problème. On a $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Cependant, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Or,

$$((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$$

Le problème vient clairement de l'élévation au carré. Une solution consiste à interdire un dénominateur pair pour l'exposant.

Proposition 15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ de la forme $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ *impair.* Le réel $(x^p)^{\frac{1}{q}}$ ne dépend pas des entiers p et q choisis pour représenter α.

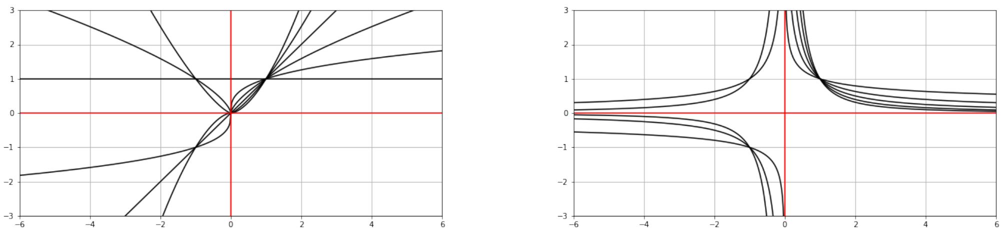
Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve faite plus haut, en remarquant que q et s étant impairs, la fonction $t \mapsto t^{qs}$ est injective sur $\mathbb{R}$. $\square$

Definition 4. Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et q est impair. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $\alpha \geq 0$, et tout $x \in \mathbb{R}^*$ si $\alpha < 0$, $x^\alpha = (x^p)^{\frac{1}{q}}$.

Les trois propriétés des puissances sont encore vérifiées. La dérivabilité de $x \mapsto x^\alpha$ aussi, sur $\mathbb{R}_-^*$ et aussi, bien entendu, sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.5 Représentations graphiques

Voici les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto x^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{Q}$. On a séparé pour des raisons de clarté les puissances positives et les puissances négatives.



(a) Puissances positives

(b) Puissances négatives

FIGURE 3 – Puissances rationnelles

3 Puissances irrationnelles

3.1 Passer des rationnels aux réels

Commençons par remarquer que les propriétés de morphisme du logarithme s'étendent aux puissances rationnelles.

Proposition 16. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$. On a

$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x$$

Démonstration. Posons $\alpha = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a

$$q \ln x^\alpha = \ln x^{\alpha q} = \ln x^p = p \ln x$$

d'où le résultat en divisant par q. □

Corollaire 17. On a pour tout réel $x > 0$ et tout $\alpha \in \mathbb{Q}$,

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$$

Démonstration. C'est immédiat, puisque exp est la réciproque de ln. Remarquer le cas particulier $x = e$ qui nous donne pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$

$$e^\alpha = \exp \alpha$$

□

Ceci suggère de prendre l'égalité du corollaire comme *définition* de x^α lorsque α est un irrationnel.

Definition 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$$

Remarquons que l'on a maintenant pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^\alpha = \exp \alpha$. On a également, en passant au logarithme dans la définition des puissances,

$$\forall x > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ln x^\alpha = \alpha \ln x$$

3.2 Propriétés des puissances

Proposition 18. On a pour tous $x, y > 0$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta, (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$$

Démonstration.

- On a

$$\begin{aligned} x^{\alpha+\beta} &= \exp((\alpha+\beta)\ln x) \\ &= \exp(\alpha \ln x + \beta \ln x) \\ &= \exp(\alpha \ln x) \exp(\beta \ln x) \\ &= x^\alpha x^\beta \end{aligned}$$

- On a aussi $x^{\alpha\beta} = \exp(\alpha\beta \ln x) = \exp(\beta \ln x^\alpha) = (x^\alpha)^\beta$.
- Et enfin,

$$\begin{aligned} (xy)^\alpha &= \exp(\alpha \ln(xy)) \\ &= \exp(\alpha(\ln x + \ln y)) \\ &= \exp(\alpha \ln x + \alpha \ln y) \\ &= \exp(\alpha \ln x) \exp(\alpha \ln y) \\ &= x^\alpha y^\alpha \end{aligned}$$

□

3.3 Dérivabilité

Proposition 19. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi : x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration. On a pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \exp(\alpha \ln x)$. La fonction φ est donc clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a pour tout $x > 0$, par dérivation d'une composée,

$$\varphi'(x) = \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln x) = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

□

3.4 Prolongement en zéro

Soit $\alpha > 0$. Quand x tend vers 0, $\alpha \ln x$ tend vers $-\infty$, et donc $\exp(\alpha \ln x) = x^\alpha$ tend vers 0. On peut donc prolonger la fonction $x \mapsto x^\alpha$ par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Lorsque $\alpha = 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est constante égale à 1, elle peut donc aussi être prolongée par continuité en 0 en posant $0^0 = 1$.

En revanche, si $\alpha < 0$, x^α tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Dorénavant, lorsque $\alpha \geq 0$, nous considérerons que la fonction $\varphi : x \mapsto x^\alpha$ est définie (et continue) sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ? Si $\alpha = 0$, c'est clairement le cas et la dérivée en 0 est nulle. Supposons maintenant $\alpha > 0$. On a pour tout $x > 0$,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = x^{\alpha-1}$$

Ainsi,

- Si $0 < \alpha < 1$, les taux d'accroissement de φ tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. La fonction φ n'est pas dérivable en 0, sa courbe y admet une tangente verticale.
- Si $\alpha = 1$, l'étude est inutile car pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) = x$. La fonction est bien évidemment dérivable en 0, et sa dérivée y est égale à 1.
- Si $1 < \alpha$, les taux d'accroissement de φ tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. La fonction φ est donc dérivable en 0, de dérivée nulle.

3.5 Représentations graphiques

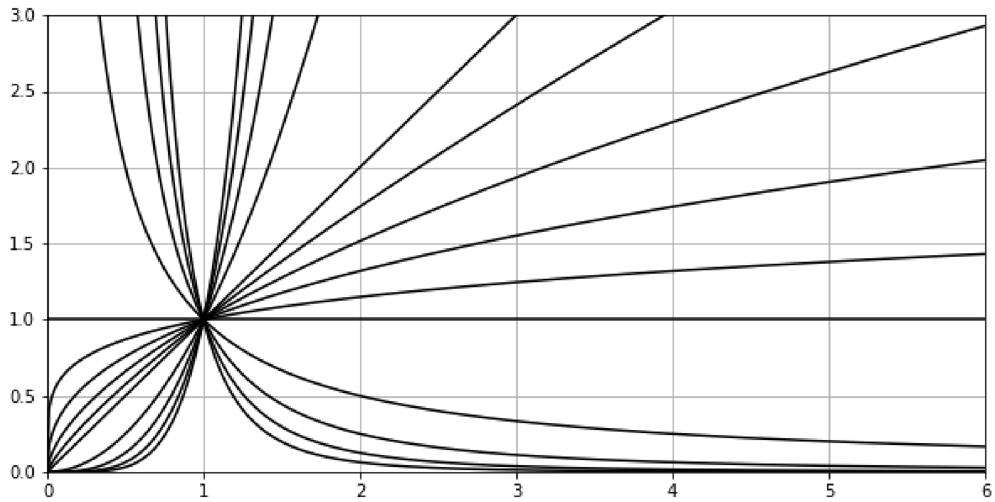


Figure 4 – Puissances réelles

4 Fonctions puissances et morphismes multiplicatifs

Terminons ce document en remarquant que l'une des propriétés des puissances leur est, d'une certaine manière, caractéristique.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$.

Proposition 20. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui n'est pas identiquement nulle. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x, y > 0, f(xy) = f(x)f(y)$
(ii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}, f = \varphi_\alpha$

Démonstration.

(i) $\implies$ (ii) : Supposons (i). Supposons un court instant que f s'annule en un réel $x_0 > 0$. On a alors pour tout $x > 0$,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{x_0}x_0\right) = f\left(\frac{x}{x_0}\right)f(x_0) = 0$$

On obtient donc une contradiction, puisque f est supposée non identiquement nulle. Ainsi, f ne s'annule pas.

Soit $x > 0$. On a

$$f(x) = f(\sqrt{x}^2) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$$

Ainsi, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par

$$g(x) = \ln f(e^x)$$

On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln f(e^{x+y}) \\ &= \ln f(e^x e^y) \\ &= \ln(f(e^x) f(e^y)) \\ &= \ln f(e^x) + \ln f(e^y) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

De plus, g est continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte par des arguments classiques qu'il existe un réel α tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \alpha x$$

On a alors pour tout $x > 0$,

$$f(x) = e^{g(\ln x)} = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$$

Ainsi, $f = \varphi_\alpha$.

(ii) $\implies$ (i) : Les fonctions φ_α sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifient (i), comme nous l'avons déjà montré. $\square$