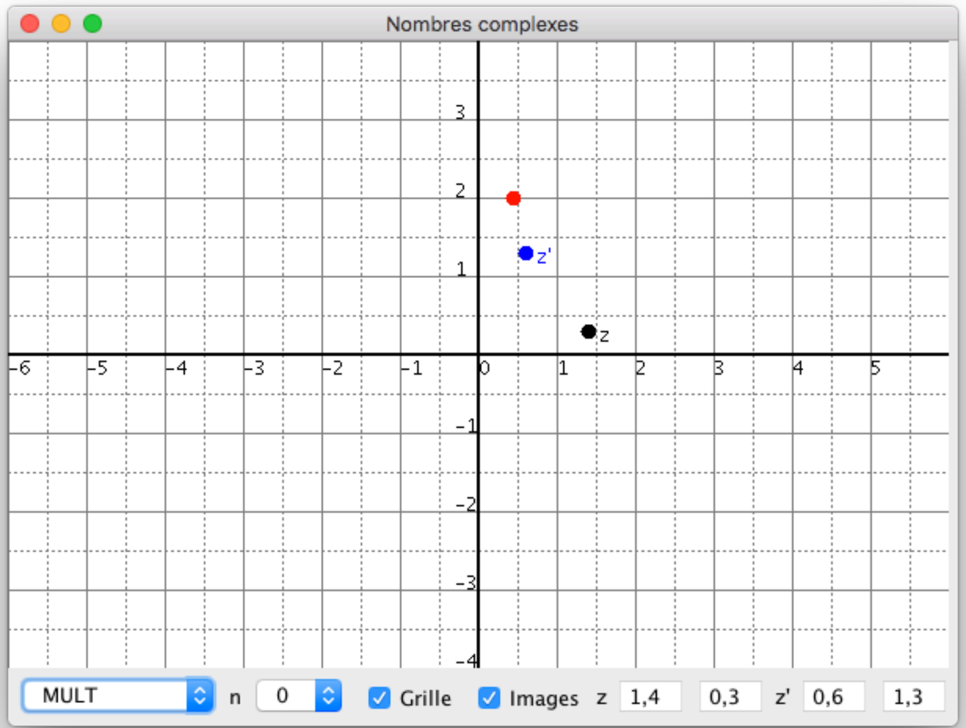
Opérations et fonctions sur les nombres complexes

Le programme Java `complex.jar` permet de visualiser les opérations de base dans $\mathbb{C}$ ainsi que le comportement d'un certain nombre de fonctions de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$.

1. Lancer le programme

- Avec un peu de chance, un double clic sur l'icône du fichier suffira.
- Si cela ne fonctionne pas, ouvrir un terminal, se placer dans le répertoire où se trouve la fichier, et taper `java -jar complex.jar`.
- Si cela ne fonctionne toujours pas, j'en suis navré. Allez plutôt faire une partie de World of Warcraft.

Au lancement, on obtient la fenêtre suivante.



2. Options

La molette de la souris permet de faire un zoom avant / arrière du graphique. Au bas de la fenêtre se trouve un menu permettant de faire quelques choix :

- Sur la gauche, un menu déroulant permettant de choisir la fonction ou l'opération à visualiser. Les premiers choix choix sont
- Juste à côté, un menu déroulant libellé "n", utilisé pour les choix `ROOT` (racines $n$ièmes) et `INTPOW` (puissance entière z^n).
- La case à cocher "Grille" permet d'afficher ou pas la grille des coordonnées.
- La case à cocher "Images" affiche (si on a choisi une fonction d'une variable z) les images directes par la fonction choisie des droites d'équations $x = cte$ et $y = cte$.
- Les coordonnées de z (et éventuellement z') sont affichées en bas à droite.

3. Remarques mathématiques

Un certain nombre de fonctions sont des prolongements à $\mathbb{C}$ des fonctions usuelles bien connues sur $\mathbb{R}$.

3.1 Fonctions trigonométriques

On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

et

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

3.2 Logarithme

On définit, pour z complexe non nul,

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

où $\arg z$ est l'unique argument de z appartenant à $]-\pi, \pi]$. C'est ce que l'on appelle la *détermination principale* du logarithme.

La fonction $\log$ est un inverse à droite de l'exponentielle complexe. On a ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\exp(\log z) = z$$

En revanche, ce n'est pas un inverse à gauche de $\exp$. Précisément, soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\log(\exp z) = \log(e^x e^{iy}) = \ln e^x + iy + 2ik\pi = z + 2ik\pi$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est l'unique entier tel que $y + 2k\pi \in]-\pi, \pi]$.

3.3 Puissances quelconques

À partir de là, on pose pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$,

$$z^{z'} = e^{z' \log z}$$

Par exemple, que vaut i^i ? Eh bien

$$\log i = \ln |i| + i \arg i = i\frac{\pi}{2}$$

De là,

$$i^i = \exp(i \log i) = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

3.4 Les autres fonctions

Je ne détaillerai pas ici les choix faits pour définir les autres fonctions (arc sinus, arc cosinus, etc.). Les fonctions `DL01` et `ARCDL01` sont présentes pour des raisons historiques. Essayer de deviner ce qu'elles sont 😀.