

Le paradoxe de Russell

Imaginons un instant qu'il existe un ensemble de tous les ensembles ... notons le \mathcal{U} comme « univers ».

Soit E l'ensemble des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes.

$$E = \{X \in \mathcal{U}, X \notin X\}$$

On a

$$E \in E \iff E \notin E$$

Contradiction. Que peut-on en conclure ? L'un des axiomes de la théorie des ensembles dit que si A est un ensemble et P une propriété, alors il existe un (unique) ensemble E dont les éléments sont les éléments de A qui vérifient la propriété P . Cet ensemble est noté

$$E = \{x \in A, P(x)\}$$

L'axiome dont nous venons de parler nous dit (en prenant $P(x) = \ll X \notin X \gg$) que E est un ensemble. Or cela aboutit à une contradiction. En conclusion :

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.