

# Le paradoxe du barbier

Marc Lorenzi

5 septembre 2020

## 1 Version 1

« Un barbier rase tous les gens qui ne se rasent pas eux-mêmes, et eux seulement. Le barbier se rase-t-il lui-même ? »

Notons  $H$  l'ensemble des êtres humains. Définissons la proposition  $\mathcal{R}(x, y)$ , définie pour tous  $x, y \in H$  par  $\mathcal{R}(x, y)$  si et seulement si  $x$  rase  $y$ .

Traduisons l'affirmation du début de l'article :

$$\exists b \in H, \forall x \in H, \neg \mathcal{R}(x, x) \iff \mathcal{R}(b, x)$$

Prenons un tel  $b \in H$ . On a

$$\forall x \in H, \neg \mathcal{R}(x, x) \iff \mathcal{R}(b, x)$$

En particulier, si nous prenons  $x = b$  (ce qui est possible, car  $b \in H$ ), nous obtenons

$$\neg \mathcal{R}(b, b) \iff \mathcal{R}(b, b)$$

qui est une contradiction. Un tel barbier ne peut pas exister.

*Maintenant, changeons un petit peu notre assertion en oubliant « et eux seulement ».*

## 2 Version 2

« Un barbier rase tous les gens qui ne se rasent pas eux-mêmes. Le barbier se rase-t-il lui-même ? »

Cette fois-ci, la propriété est

$$\exists b \in H, \forall x \in H, \neg \mathcal{R}(x, x) \implies \mathcal{R}(b, x)$$

Remarquer la subtile différence. On n'a plus une équivalence mais une *implication*. En prenant un tel  $b \in H$  et en regardant ce que cela donne lorsque  $x = b$ , on obtient

$$\neg \mathcal{R}(b, b) \implies \mathcal{R}(b, b)$$

Notons  $A = \mathcal{R}(b, b)$ , La proposition  $A$  vérifie  $\neg A \implies A$ , ce qui entraîne que  $A$  est vraie. Le barbier se rase lui-même.

J'espère que le lecteur n'aura pas trouvé ce petit article trop rasoir :-).