Équivalence

Proposition 1. Soient $w, z \in \mathbb{C}$, z n'étant pas réel. Posons $w = x + iy$ et $z = a + ib$, où $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ (et $b \neq 0$). Posons également

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On a $w^2 = z$ si et seulement si

$$(\star) \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = r \\ xy \text{ est du signe de } b \end{cases}$$

Schéma : $\forall w \in E, \forall z \in E, P(w, z) \iff Q(w, z)$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que $w^2 = z$. On a

$$z = a + ib = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Ainsi, $x^2 - y^2 = a$. De plus, $2xy = b$ donc xy est du signe de b . Par les propriétés du module, on a aussi $|w|^2 = |z|$, ce qui s'écrit encore

$$x^2 + y^2 = r$$

On a donc $(\star)$.

($\Leftarrow$) Supposons $(\star)$. En additionnant et soustrayant les deux égalités, on obtient

$$\begin{cases} x^2 &= \frac{1}{2}(r + a) \\ y^2 &= \frac{1}{2}(r - a) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} x &= \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2}(r + a)} \\ y &= \varepsilon' \sqrt{\frac{1}{2}(r - a)} \end{cases}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$. De plus, xy est du signe de b , donc $\varepsilon\varepsilon'$ est du signe de b .

On a $w^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$. Précisons partie réelle et partie imaginaire de w^2 :

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= \left(\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}(r+a)}\right)^2 - \left(\varepsilon'\sqrt{\frac{1}{2}(r-a)}\right)^2 \\&= \frac{1}{2}(r+a) - \frac{1}{2}(r-a) \\&= a \\2xy &= 2\varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{1}{2}(r+a)}\sqrt{\frac{1}{2}(r-a)} \\&= 2\varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{1}{2}(r+a)\frac{1}{2}(r-a)} \\&= 2\varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{1}{4}(r^2 - a^2)} \\&= \varepsilon\varepsilon'\sqrt{b^2} \\&= \varepsilon\varepsilon'|b| \\&= b\end{aligned}$$

Ainsi, $w^2 = z$. $\square$