Existence et unicité

> **Proposition 1.** *Toute fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Schéma : $\forall f \in E, \exists! g \in A, \exists! h \in B, P(f, g, h)$.

Démonstration.

(!) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que $f = g + h$ où $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g est paire et h est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left\{ \begin{array}{lllll} f(x) & = & g(x) + h(x) & & \\ f(-x) & = & g(-x) + h(-x) & = & g(x) - h(x) \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$(\star) \left\{ \begin{array}{lll} g(x) & = & \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ h(x) & = & \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{array} \right.$$

Il existe donc **au plus** une fonction g et une fonction h qui conviennent. On a montré l'unicité.

($\exists$) Soient $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour tout réel x par $(\star)$. Vérifions que g et h conviennent.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

  $$g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$$

  Ainsi, $f = g + h$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

  $$g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(--x)) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$$

  Ainsi, g est paire.
- De même, h est impaire.

Il existe donc **au moind** une fonction g et une fonction h qui conviennent.On a montré l'existence. $\square$