Existentialité

Proposition 1. *Il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.*

Schéma : $\exists a \in E, \exists b \in E, P(a,b)$.

Démonstration. Considérons le réel $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

- Cas 1, $x \in \mathbb{Q}$. On a terminé en prenant $a = b = \sqrt{2}$.
- Cas 2, $x \notin \mathbb{Q}$. On a

$$x^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}^2 = 2$$

  On a donc terminé en posant $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

$\square$

Remarque. À la fin de la démonstration, on ne sait pas exhiber deux irrationnels a et b répondant à la question. Pourquoi ? Parce qu'on ne sait pas si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou irrationnel. Il faut cependant bien que ce nombre soit l'un ou l'autre, alors dans quel cas est-on ? Très bonne question, résolue par le *théorème de Gelfond-Schneider*.