Exercice 1. Étudier la continuité éventuelle à l'origine des fonctions f ci-dessous. Chacune d'entre-elles vérifie $f(0,0)=0$, et est définie, pour $(x,y)\neq(0,0)$, par

1. $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

1. Posons $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ où $r\geq 0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, de sorte que $r=||(x,y)||$. On a pour tout $r>0$,
$$|f(x,y)|=r|\cos^3\theta+\sin^3\theta|\leq 2r$$
On en déduit que $f(x,y)$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0. La fonction f est donc continue en $(0,0)$.
2. Pour tout $\varepsilon>0$, on a
$$f(\varepsilon,\varepsilon)=2$$
Cette quantité ne tend pas vers 0 lorsque ε tend vers 0. Ainsi, f n'est pas continue en $(0,0)$.
3. Avec les mêmes notations que dans la question 1, on a
$$|f(x,y)|=r\cos^2\theta\leq r$$
qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0. La fonction f est continue en $(0,0)$.
4. Encore plus facile, puisque $f(x,y)=r$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

Exercice 2. Étudier l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$ des fonctions de l'exercice précédent.

1. Pour tout $x\neq 0$, on a
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1$$
qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Ainsi,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$$
De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$.
2. Pour tout $x\neq 0$, on a
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{1}{x}$$
qui ne tend pas vers une limite finie lorsque x tend vers 0. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas, et de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Pour tout $x\neq 0$, on a
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{|x|}{x}$$
qui ne tend pas vers une limite finie lorsque x tend vers 0. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.
Pour tout $y\neq 0$, on a
$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

qui tend vers 0 lorsque y tend vers 0. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

4. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{|x|}{x}$$

qui ne tend pas vers une limite finie lorsque x tend vers 0. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas, et de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 3. On pose $f(0,0) = 0$ et, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$$

Majorer judicieusement, pour tout réel $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$, la quantité $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|$ lorsque θ décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$ (on considérera les deux cas $|\sin\theta| \leq \sqrt{\rho}$ et $|\sin\theta| \geq \sqrt{\rho}$). Déterminer ensuite la limite éventuelle de $M(\rho)$ lorsque $\rho \longrightarrow 0$. Conclusion ?

On a

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 \frac{\cos^3\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

Si $|\sin\theta| \geq \sqrt{\rho}$, alors

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^2 \frac{1}{0 + \rho} = \rho$$

Si $|\sin\theta| \leq \sqrt{\rho}$, alors

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^2 \frac{\sqrt{\rho}}{\rho^2(1-\rho)^2} = \frac{\sqrt{\rho}}{(1-\rho)^2} \leq 4\sqrt{\rho}$$

Ainsi, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \max(\rho, 2\sqrt{\rho})$$

Le majorant tend vers $0 = f(0,0)$ lorsque ρ tend vers 0. La fonction f est donc continue en $(0,0)$.

Exercice 4. On pose

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

1. Dessiner l'ensemble de définition de f.
2. Prouver que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0$.
3. On prolonge f à $\mathbb{R}^2$ en posant $f(0,0) = 0$. Montrer que f n'est pas continue en 0.
4. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et valent 0.

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x,y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0$. de même pour l'autre limite.

3. Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x,x) = 1$$

et cette quantité ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.

4. Pour tout $x \neq 0$, on a
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$
d'où l'existence et la nullité de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. De même pour la dérivée partielle par rapport à y.

Exercice 5. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

1. $f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$
2. $f(x,y) = xe^y + ye^x$

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2(x-y)$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2(x-y)$$
Si f a un extremum local au point (x,y), alors ses deux dérivées partielles s'annulent. En additionnant, on obtient $3(x^2+y^2) = 0$, d'où $x = y = 0$.
Inversement, soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$f(x,x) = 2x^3$$
Si $x > 0$, $f(x,x) > f(0,0)$, donc f n'a pas un maximum local en $(0,0)$.
Si $x < 0$, $f(x,x) < f(0,0)$, donc f n'a pas un minimum local en $(0,0)$.
La fonction f ne possède donc pas d'extrema locaux.
2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x$$
Si f a un extremum local au point (x,y), ses dérivées partielles s'y annulent. On a donc
$$e^y = -ye^x \text{ et } e^x = -xe^y$$
En multipliant ces égalités, on obtient
$$xy = 1$$
En remplaçant y par $\frac{1}{x}$ dans l'égalité $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, on obtient
$$\varphi(x) = 0$$
où $\varphi(x) = x + e^{x-\frac{1}{x}}$. Clairement, φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, et on a pour tout $x < 0$,
$$\varphi'(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{x-\frac{1}{x}} > 0$$
La fonction φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et s'y annule au plus une fois. Il reste à remarquer que $\varphi(-1) = 0$. Ainsi, $x = -1$ et $y = \frac{1}{x} = -1$. Si f a un extremum local, c'est au point $(-1,-1)$.
Il reste à examiner la réciproque. Nous allons montrer que f n'a pas d'extremum local au point $(-1,-1)$. Tout d'abord, remarquons que
$$f(-1+h,-1) - f(-1,-1) = (-1+h)e^{-1} - e^{-1+h} - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(-1-h+e^h)$$

Pour tout $h \neq 0$, on a $e^h > 1 + h$, donc

$$f(-1+h,-1) < f(-1,-1)$$

Ainsi, f n'a pas un minimum local en $(-1,-1)$. Maintenant, remarquons que

$$\begin{aligned}
f(-1+2k,-1+k) &= (-1+2k)e^{-1+k} + (-1+k)e^{-1+2k} \\
&= \frac{1}{e}((-1+2k)e^{k} + (-1+k)e^{2k}) \\
&= \frac{1}{e}((-1+2k)(1+k+\frac{1}{2}k^2+o(k^2)) \\
&\quad +(-1+k)(1+2k+2k^2+o(k^2))) \\
&= \frac{1}{e}(-2+\frac{3}{2}k^2+o(k^2)) \\
&= f(-1,-1) + \frac{3}{2e}k^2 + o(k^2)
\end{aligned}$$

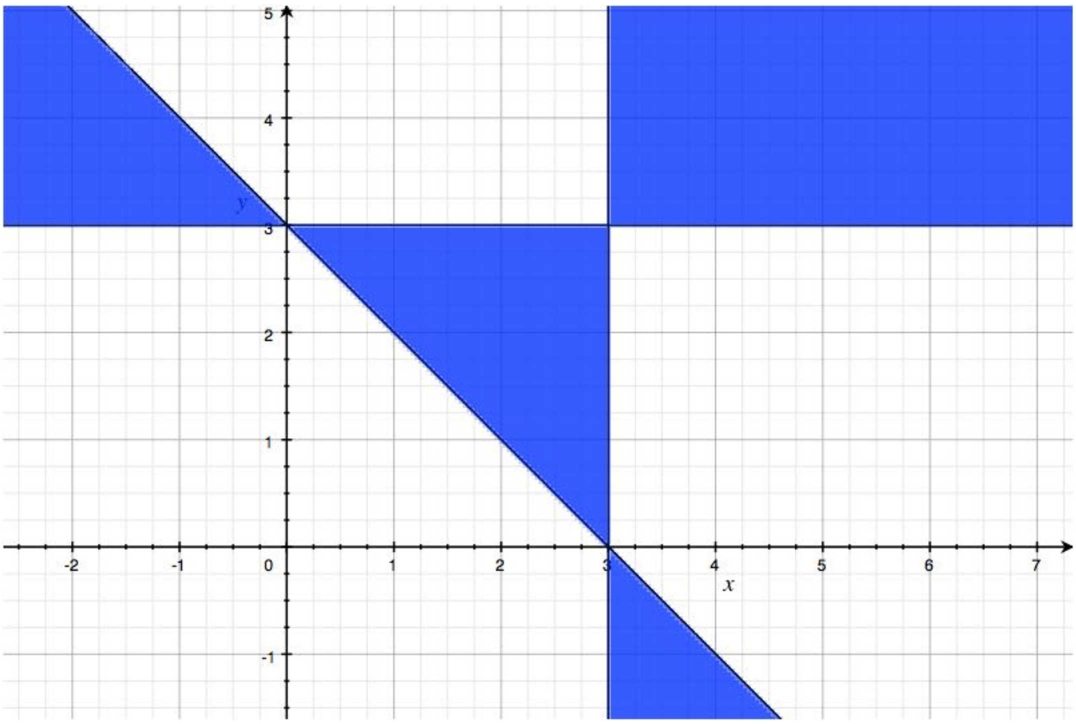
Ainsi, $f(-1+2k,-1+k) > f(-1,1)$ pour tout $k \neq 0$ assez petit. La fonction f n'a donc pas de maximum local au point $(-1,-1)$.

Exercice 6. On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$$

1. Dessiner l'ensemble des points (x,y) vérifiant $f(x,y) > 0$ et l'ensemble des points (x,y) vérifiant $f(x,y) < 0$.
2. Déterminer les points (x,y) du plan vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
3. Parmi ces points, lesquels donnent lieu à un maximum relatif de f ? À un minimum relatif ?

1. La partie du plan en bleu est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq 0\}$.



2. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+y-6)(3-y)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+2y-6)(3-x)$$

Facilement, les deux dérivées partielles s'annulent simultanément aux points $(3,0)$, $(0,3)$, $(3,3)$ et $(2,2)$.

3. Les trois premiers points ne donnent pas lieu à un extremum local de f. En effet (cf le dessin de la question 1), f est nulle en ce points et prend dans tout voisinage de ceux-ci des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. Regardons ce qui se passe au point $(2,2)$. Posons $x = 2+h$ et $y = 2+k$. On a

$$f(x,y) - f(2,2) = -h^2 - k^2 - hk + hk(h+k)$$

Posons $h = r\cos\theta$ et $k = r\sin\theta$. Il vient, lorsque r tend vers 0,

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) - f(2,2) & = & -r^2(1+\sin\theta\cos\theta + r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)) \\ & \sim & -r^2(1+\sin\theta\cos\theta) \end{array}$$

Cette quantité est strictement négative pour $r \neq 0$ assez petit. Ainsi, f admet un maximum local au point $(2,2)$.

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose, pour a et b réels,

$$F(a,b) = \int_0^1 (ax+b-f(x))^2\,dx$$

1. Déterminer les couples (a,b) pour lesquels $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = 0$.
2. Calculer explicitement a et b pour $f(x) = x^2$.
3. Calculer explicitement a et b pour $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1. On a

$$\begin{array}{rcl} F(a,b) & = & \int_0^1 (f(x)^2 + a^2x^2 + b^2 - 2axf(x) - 2bf(x) + 2abx)\,dx \\ & = & \int_0^1 f(x)^2\,dx + \frac{1}{3}a^2 + b^2 - 2a\int_0^1 xf(x)\,dx - 2b\int_0^1 f(x)\,dx + ab \end{array}$$

On en déduit

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{2}{3}a + b - 2\int_0^1 xf(x)\,dx$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = a + 2b - 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

Ainsi, $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = 0$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+3b & = & 6\int_0^1 xf(x)\,dx \\ a+2b & = & 2\int_0^1 f(x)\,dx \end{array}\right.$$

Ce système possède une unique solution.

2. On a ici

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} \text{ et } \int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{1}{4}$$

Ainsi, (a,b) est l'unique solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+3b & = & \frac{3}{2} \\ a+2b & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

On en déduit $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$.

3. On a ici

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} \text{ et } \int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2$$

Ainsi, (a, b) est l'unique solution du système

$$\begin{cases} 2a + 3b & = & 3\ln 2 \\ a + 2b & = & \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On en déduit $a = 6\ln 2 - \frac{3\pi}{2}$ et $b = \pi - 3\ln 2$.

Exercice 8. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Soit $x_0 > 0$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f(x_0, t)$.

1. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi' = 0$.
2. En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(x_0, y) = f(x_0, 0)$.
3. Soit $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $F(x) = f(x, 0)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \Omega$, $f(x, y) = F(x)$, et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Une réciproque. Soit $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \Omega$ par $f(x, y) = F(x)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

1. Posons pour tout t réel, $x(t) = x_0$ et $y(t) = t$, de sorte que

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t))$$

Par la règle de la chaîne, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times 0 + 0 \times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. La fonction φ est ainsi constante sur $\mathbb{R}$. On a pour tout réel y, $\varphi(y) = \varphi(0)$, c'est à dire $f(x_0, y) = f(x_0, 0)$.
3. Soit $(x, y) \in \Omega$. On a donc $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Par la question 2,

$$F(x) = f(x, 0) = f(x, y)$$

On a $F = f \circ \psi$ où $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \Omega$ est définie pour tout $x > 0$ par $\psi(x) = (x, 0)$. En tant que composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, F est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$.
4. C'est évident. On a également pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F'(x)$$

Exercice 9. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. On considère l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$$(\mathcal{E}) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

1. Montrer que l'application $\varphi : (x,y) \longmapsto (x, \frac{y}{x})$ est une bijection de Ω sur Ω.
2. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $g = f \circ \varphi^{-1}$ est solution d'une équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E}')$ que l'on déterminera.
3. Résoudre $(\mathcal{E}')$ et en déduire les solutions de $(\mathcal{E})$.

---

1. Tout d'abord, pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a $(x, \frac{y}{x}) \in \Omega$. Ainsi, $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$. Soit
$$\psi : (u,v) \longmapsto (u, uv)$$
On vérifie de même que $\psi : \Omega \longrightarrow \Omega$, que $\varphi \circ \psi = id_\Omega$ et que $\psi \circ \varphi = id_\Omega$. Ainsi, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$.
2. Posons $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = \frac{y}{x}$. On a pour tout $(x,y) \in \Omega$, $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$. Par la règle de la chaîne, on a
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$
On en déduit
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial u}$$
Ainsi comme x n'est pas nul sur Ω, f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si g est solution de
$$(\mathcal{E}') \ \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$
3. Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, g est solution de $(\mathcal{E}')$ sur Ω si et seulement si il existe $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $(u,v) \in \Omega$, $g(u,v) = G(v)$, c'est à dire que pour tout $(x,y) \in \Omega$,
$$f(x,y) = g\left(x, \frac{y}{x}\right) = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

Exercice 10. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. On considère l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$
$$(\mathcal{E}) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

1. Montrer que l'application $\varphi : (x,y) \longmapsto (xy, \frac{y}{x})$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$ sur lui-même.
2. Prouver que la réciproque de φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
3. Procéder comme dans l'exercice précédent et résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.
4. Trouver une solution f de $(\mathcal{E})$ vérifiant $f(x,x) = x^4 e^{x^2}$ pour tout $x > 0$.

---

1. Tout d'abord, pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a $(xy, \frac{y}{x}) \in \Omega$. Ainsi, $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$. Soit
$$\psi : (u,v) \longmapsto \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$$
On vérifie de même que $\psi : \Omega \longrightarrow \Omega$, que $\varphi \circ \psi = id_\Omega$ et que $\psi \circ \varphi = id_\Omega$. Ainsi, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$.

2. Posons $g = f \circ \varphi^{-1}$, de sorte que $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Posons également $u(x,y) = xy$ et $v(x,y) = \frac{y}{x}$. On a pour tout $(x,y) \in \Omega$, $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$. Par la règle de la chaîne, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

On en déduit

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = -2\frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$$

Ainsi comme y n'est pas nul sur Ω, f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si g est solution de

$$(\mathcal{E}') \ \frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

3. Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, g est solution de $(\mathcal{E}')$ sur Ω si et seulement si il existe $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $(u,v) \in \Omega$, $g(u,v) = G(u)$, c'est à dire que pour tout $(x,y) \in \Omega$,

$$f(x,y) = g\left(xy, \frac{y}{x}\right) = G\left(xy\right)$$

4. Il s'agit ici de choisir une fonction G telle que pour tout > 0,

$$G(x^2) = x^4 e^{x^2}$$

Clairement, $G(x) = x^2 e^x$ convient (est-ce la seule ?). On a alors pour tout $(x,y) \in \Omega$,

$$f(x,y) = x^2 y^2 e^{xy}$$