

Exercice 1. Étudier la continuité éventuelle à l'origine des fonctions f ci-dessous. Chacune d'entre-elles vérifie $f(0, 0) = 0$, et est définie, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, par

1. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
4. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercice 2. Étudier l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$ des fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 3. On pose $f(0, 0) = 0$ et, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$$

Majorer judicieusement, pour tout réel $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$, la quantité $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)|$ lorsque θ décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$ (on considérera les deux cas $|\sin \theta| \leq \sqrt{\rho}$ et $|\sin \theta| \geq \sqrt{\rho}$). Déterminer ensuite la limite éventuelle de $M(\rho)$ lorsque $\rho \rightarrow 0$. Conclusion ?

Exercice 4. On pose

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

1. Dessiner l'ensemble de définition de f .
2. Prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$.
3. On prolonge f à $\mathbb{R}^2$ en posant $f(0, 0) = 0$. Montrer que f n'est pas continue en 0.
4. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent et valent 0.

Exercice 5. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

1. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$
2. $f(x, y) = x e^y + y e^x$

Exercice 6. On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$$

1. Dessiner l'ensemble des points (x, y) vérifiant $f(x, y) > 0$ et l'ensemble des points (x, y) vérifiant $f(x, y) < 0$.
2. Déterminer les points (x, y) du plan vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.
3. Parmi ces points, lesquels donnent lieu à un maximum relatif de f ? À un minimum relatif ?

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose, pour a et b réels,

$$F(a, b) = \int_0^1 (ax + b - f(x))^2 dx$$

1. Déterminer les couples (a, b) pour lesquels $\frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = 0$.
2. Calculer explicitement a et b pour $f(x) = x^2$.
3. Calculer explicitement a et b pour $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Exercice 8. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Soit $x_0 > 0$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f(x_0, t)$.

1. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi' = 0$.

2. En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(x_0, y) = f(x_0, 0)$.
3. Soit $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $F(x) = f(x, 0)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \Omega$, $f(x, y) = F(x)$, et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Une réciproque. Soit $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \Omega$ par $f(x, y) = F(x)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice 9. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. On considère l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$$(\mathcal{E}) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

1. Montrer que l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x, \frac{y}{x})$ est une bijection de Ω sur Ω .
2. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $g = f \circ \varphi^{-1}$ est solution d'une équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E}')$ que l'on déterminera.
3. Résoudre $(\mathcal{E}')$ et en déduire les solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 10. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. On considère l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$$(\mathcal{E}) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

1. Montrer que l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (xy, \frac{y}{x})$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$ sur lui-même.
2. Prouver que la réciproque de φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .
3. Procéder comme dans l'exercice précédent et résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.
4. Trouver une solution f de $(\mathcal{E})$ vérifiant $f(x, x) = x^4 e^{x^2}$ pour tout $x > 0$.