Exercice 1. Soit u un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1. On pose $v = u - id_E$. Montrer que $\text{Ker } v = \text{Im } v^{\perp}$.
2. Pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on pose
$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u^k(x)$$
Montrer que lorsque $n \longrightarrow \infty$, x_n converge vers la projection orthogonale de x sur $\text{Ker } v$.

Exercice 2. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $X^T AX$ est égal à la somme des coefficients de la matrice A.
2. Interpréter la quantité précédente comme un produit scalaire, et en déduire que
$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\right| \leq n$$
3. Montrer que le majorant n obtenu ci-dessus est optimal.

Exercice 3. Soit $a = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à $H =< a >^{\perp}$.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.

1. Montrer que pour tous vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E, on a
$$|[u_1, \ldots, u_n]| \leq ||u_1|| \ldots ||u_n||$$
2. En déduire que pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j, |a_{ij}| \leq 1$, on a $|\det A| \leq n^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. On se donne une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ (pas nécessairement orthogonale) de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe une unique base $\widehat{\mathcal{B}} = (\widehat{u_1}, \widehat{u_2}, \widehat{u_3})$ telle que $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, < u_i, \widehat{u_j} >= \delta_{ij}$.
Indication : $\widehat{u_1}$ doit être orthogonal à u_2 et u_3, donc, c'est un multiple de $u_2 \wedge u_3$.
2. Que vaut $\widehat{\mathcal{B}}$ lorsque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée directe ? indirecte ?
3. De façon générale, que vaut $\widehat{\widehat{\mathcal{B}}}$?
4. Soit $x = \sum_i x_i u_i$. Montrer que $x_i =< x, \widehat{u_i} >$.
5. Soient $x, y \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $< x, y >= \sum_i x^i y_i$ où $x^i =< x, u_i >$.

Exercice 6. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si a, b, c sont les solutions d'une équation du type
$$x^3 - x^2 + k = 0 \text{ où } 0 \leq k \leq \frac{4}{27}$$

2. On pose dans l'équation ci-dessus $k = \frac{4}{27}\sin^2\varphi$. Déterminer les caractéristiques des rotations de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice M.

Exercice 7. Soit $e \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est $e_1 = \frac{e}{||e||}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on construit une suite $(x_k)_{k\geq 0}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par récurrence en posant

$$\begin{cases} x_0 & = & x \\ x_{k+1} & = & e \wedge x_k (k \geq 0) \end{cases}$$

Enfin, on pose pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ et tout entier naturel n

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{k!}$$

1. Calculer pour $i = 1, 2, 3$ et tout entier naturel n, le vecteur $\varphi_n(e_i)$.
2. Déterminer la limite de $\varphi_n(e_i)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$. Calculer $\varphi(x)$ à partir de la décomposition de x dans la base $\mathcal{B}$. Constater que φ est linéaire, et écrire $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\varphi$. Quelle est la nature de l'endomorphisme φ ?

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une rotation et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 9. Même exercice que le précédent avec

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$