Exercice 1. Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Écrire $\varphi(x,x)$ comme une somme de trois carrés.
2. En déduire que φ est un produit scalaire.
3. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour φ.

Exercice 2. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\, dt$$

Prouver que l'on a là un produit scalaire, et déterminer une base orthogonale de E pour ce produit scalaire.

Exercice 3. Soient F et G deux sev d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $(F \cup G)^\perp = (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i \leq n}$ une base orthonormée de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exprimer, pour tout i et tout j, le coefficient a_{ij} en fonction de $f(e_j)$, de e_i et d'un produit scalaire.

Exercice 5. Soit $(E, < \ ,\ >)$ un espace euclidien.

1. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application (on n'impose pas à f d'être linéaire) vérifiant

   $$\forall x, y \in E,\ < f(x), y >=< x, f(y) >$$

   Prouver que f est linéaire. Un tel endomorphisme est appelé un endomorphisme symétrique.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Montrer qu'un endomorphisme de E est un endomorphisme symétrique si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice symétrique.
3. Montrer qu'un projecteur orthogonal, une symétrie orthogonale, sont des endomorphismes symétriques.

Exercice 6. Soit

$$E = \left\{ \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\, dx, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Calculer le plus petit élément de E.

Indication : pourquoi cet exercice figure-t-il dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens ?

Exercice 7. Sur $E = \mathcal{C}^1([0,1])$, on pose

$$< f, g >= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt$$

Montrer que l'on a là un produit scalaire.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2$$

Prouver que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 9. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y + z = 0$.

1. Déterminer $P^{\perp}$.
2. Déterminer l'expression du projecteur orthogonal sur P, de la symétrie orthogonale par rapport à P.
3. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la distance de u à P.

Exercice 10. Mêmes questions, mais pour la droite vectorielle D de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 2, 3)$.

Exercice 11. Mêmes questions, mais on est dans $\mathbb{R}^4$ et P est le plan engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 1)$ et $(1, -1, 1, -1)$.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E.

1. On suppose que p est un projecteur orthogonal. Montrer que $\forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$.
2. On suppose que p n'est pas un projecteur orthogonal, c'est à dire : p est le projecteur sur F parallèlement à G (avec $F \oplus G = E$) et $\exists u \in F, \exists v \in G, < u, v > \neq 0$. Montrer qu'il existe un vecteur x de E, combinaison linéaire de u et v, tel que $||p(x)|| > ||x||$.

Exercice 13. Montrer qu'une symétrie σ d'un espace euclidien E est une symétrie orthogonale de E si et seulement si $\forall x \in E, ||\sigma(x)|| = ||x||$.