Exercice 1. Une urne contient n boules, dont r sont rouges et $b = n - r$ sont blanches. On dispose d'un dé rouge parfait et d'un dé blanc pas parfait. Le 6 du dé blanc a une probabilité $\frac{1}{4}$ d'apparaître. Les autres faces du dé blanc ont la même probabilité d'apparition. On tire au hasard une boule dans l'urne et on lance le dé de la couleur correspondante. Soit X la valeur obtenue avec le dé lancé.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Quel univers pourrait-on choisir pour modéliser cette expérience ?

Exercice 2. On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire 5 cartes au hasard. Soit X le nombre d'as tirés. L'univers choisi est l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3. Même exercice que le précédent, mais X est le nombre de coeurs tirés.

Exercice 4. Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [0, 1]$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $p_1, p_2 \in [0, 1]$. Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit la loi $\mathcal{B}(n, p_1)$ et que pour $k \in [\![0, n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$ est $\mathcal{B}(k, p_2)$. Quelle est l'espérance de Y ?

Exercice 6. Deux urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On prend une boule dans chaque urne et on appelle X le plus grand des deux numéros tirés.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $P(X \leq k)$.
2. En déduire $P(X = k)$.
3. Calculer $E(X)$ ainsi qu'un équivalent de cette espérance lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(m, \frac{1}{2})$ et $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Déterminer $P(X = Y)$.

Exercice 8. On lance n ballons au hasard dans n paniers numérotés de 1 à n. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note X_i le nombre de ballons dans le panier i.

1. Déterminer la loi de X_i, son espérance, sa variance.
2. On pose $Y = X_1 + X_2$. Déterminer la loi de Y, son espérance, sa variance.
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 9. M. Bienaymé laisse tomber 3600 dés parfaits. Soit X le nombre de 6.

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? Sa variance ?
2. Selon M. Tchebychev, quel est un minorant de la probabilité p que X soit compris entre 550 et 650 ?
3. Donner une formule donnant la valeur exacte de p, puis calculer une valeur approchée de p à 10^{-3} près (utiliser Python, bien entendu).

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $Cov(X, Y) = 0$.
2. On suppose X et Y indépendantes. Déterminer les lois de $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

3. Déterminer la loi conjointe de U et V. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. Soit $p \in [0,1]$. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $\lambda = P(X=1, Y=1)$.

1. Que vaut λ lorsque $X = Y$? Lorsque X et Y sont indépendantes ?
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
3. Montrer que $\max(0, 2p-1) \leq \lambda \leq p$.
4. Calculer $Cov(X,Y)$ en fonction de p et λ.
5. Toujours en fonction de p et λ, déterminer l'espérance et la variance de $X+Y$ et $X-Y$.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On note G_X la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(X=k)t^k$. Cette somme est en réalité finie puisque l'univers Ω est fini.

1. Que vaut $G(1)$?
2. Calculer $G'(1)$ et $G''(1)$ en fonction de $E(X)$ et de $V(X)$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de $G'(1)$ et $G''(1)$.
3. Calculer G_X lorsque X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Retouver les valeurs bien connues de $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 13. On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue N fois l'expérience suivante : on tire une boule de l'urne. On note sa couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute dans l'urne une boule *blanche* supplémentaire. Pour $k = 1, \ldots, N$, on note A_k l'événement « la $k$ième boule tirée est blanche ». Soit X le nombre de boules blanches tirées.

1. Calculer $P(A_k)$ pour $k = 1, \ldots, N$. Que vaut $E(\mathbb{1}_{A_k})$?
2. En déduire $E(X)$.
3. Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=N)$.

Exercice 14. Même exercice que le précédent, mais à chaque étape on rajoute dans l'urne une boule *noire* supplémentaire. On donnera également un équivalent de $E(X)$ lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 15. Soient $n, N \geq 1$. Soient $X_1, \ldots, X_N$ N variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Soit $X = \max(X_1, \ldots, X_N\}$.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire $P(X=k)$.
2. Montrer que
$$E(X) = n - \frac{1}{n^N} \sum_{k=0}^{n-1} k^N$$
3. Reconnaître dans l'expression de $\frac{E(X)}{n}$ une somme de Riemann et en déduire un équivalent de $E(X)$ lorsque n tend vers l'infini. Commenter le résultat.