Exercice 1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{3}{4}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$.

1. Montrer que
$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$$
2. Montrer par des exemples que ces bornes sont optimales.
3. Faire de même pour $P(A \cup B)$.

Exercice 2. Il pleut un jour sur 5. Je prends mon parapluie un jour sur 3. S'il pleut, je prends mon parapluie.

1. Quelle est la probabilité que je prenne mon parapluie sachant qu'il ne pleut pas ?
2. Quelle est la probabilité que je ne prenne pas mon parapluie sachant qu'il ne pleut pas ?
3. Quelle est la probabilité que je prenne mon parapluie et qu'il ne pleuve pas ?

Exercice 3. Un institut effectue un sondage pour déterminer qui, de Monsieur A ou de Monsieur B, est le plus populaire. On propose aux sondés le protocole suivant : six cartes sont présentées faces cachée. La personne sondée en tire une au hasard. Une des six cartes porte le message « dites le contraire de la vérité », les cinq autres « dites la vérité ». À l'issue du sondage, une proportion p' des sondés a répondu « Monsieur A ». Quelle est la proportion p des sondés ayant une préférence pour Monsieur A ?

Exercice 4. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité qu'un couple (A, B) de parties de E vérifie $|A| = a$, $|B| = b$ et $|A \cap B| = c$?

Exercice 5. On place 8 tours sur un échiquier. Quelle est la probabilité qu'aucune tour ne puisse en attaquer une autre ?

Exercice 6. On lance n dés parfaits.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Quelle est la probabilité d'obtenir k « six » ?
2. Soient $k_1, k_2, k_3 \in [\![0, n]\!]$ tels que $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Quelle est la probabilité d'obtenir k_1 « un », k_2 « deux » et k_3 « trois » ?

Exercice 7. On dispose d'un dé blanc équilibré et d'un dé noir pipé. Le dé noir sort le 6 avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et les autres numéros avec une probabilité $\frac{2}{15}$. Deux joueurs s'affrontent. Le joueur A prend le dé noir et le lance. Le joueur B prend le dé blanc et le lance. Le gagnant est celui qui obtient le plus haut score. En cas d'égalité, c'est le joueur B qui gagne.

1. Quelle est la probabilité que B gagne sachant que A a fait 1 ?
2. Quelle est la probabilité que B gagne sachant que A a fait 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? Et 6 ?
3. Quelle est la probabilité que B gagne ?

Exercice 8. On lance deux dés parfaits. L'un est rouge, l'autre est noir.

1. Soit A l'événement « un dés dés marque 1 » et B l'événement « la somme des dés est 7 ». Montrer que A et B ne sont pas indépendants.
2. Soit A' l'événement « le dé rouge marque 6 » et B l'événement « la somme des dés est 7 ». Montrer que A' et B sont indépendants.

Exercice 9. On lance deux dés parfaits. Montrer que l'événement « la somme des dés est 7 » est indépendant du score du premier dé, ceci quel que soit ce score. Montrer que ceci est faux pour l'événement « la somme des dés est s » ceci pour tout $s \neq 7$.

Exercice 10. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux boules tirées aient le même numéro ?
2. On prend dans cette question $N = 365$. À partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$? supérieure à $\frac{9}{10}$?

Exercice 11. On lance n ballons au hasard dans n paniers. On choisit pour univers $\Omega = [\![1, n]\!]^{[\![1,n]\!]}$, l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

1. Quelle est la probabilité que dans chaque panier il y ait au moins un ballon ?
2. Quelle est la probabilité que dans chaque panier il y ait au plus un ballon ?
3. Quelle est la probabilité que dans au moins un panier il y ait au moins deux ballons ?
4. Quelle est la probabilité que dans au moins un panier il n'y ait pas de ballon ?

Exercice 12. Soit Ω un univers de cardinal 4, muni de la probabilité uniforme.

1. Combien a-t-on d'événements ?
2. Combien a-t-on de couples d'événements ?
3. Combien a-t-on de couples d'événements incompatibles ?
4. Combien a-t-on de couples d'événements tels que le premier entraîne le deuxième ?
5. Combien a-t-on de couples d'événements indépendants ?

Exercice 13. On dispose de deux urnes. La première urne contient 6 boules rouges et 4 boules vertes. La deuxième urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires. On dispose également d'une pièce truquée ayant la probabilité $p \in [0, 1]$ de tomber sur pile. On lance la pièce. Si c'est pile on tire une boule dans la première urne. Sinon on tire une boule dans la deuxième urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ? Une boule noire ? Une boule verte ?
2. On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de la première urne ?

Exercice 14.

1. Je fais le pari d'obtenir au moins un six en lançant un dé 4 fois de suite. Ai-je plus de chances de perdre ou de gagner ?
2. Je fais le pari d'obtenir au moins un double six en lançant deux dés n fois de suite. À partir de quelle valeur de n ai-je plus de chances de gagner que de perdre ?

Exercice 15. On lance trois dés parfaits. Soit A l'événement « la somme des dés est strictement supérieure à 10 ». Soit B l'événement « la somme des dés est inférieure ou égale à 10 ».

1. Choix de l'univers et de la probabilité ?
2. Que vaut $A \cup B$? $A \cap B$?
3. Montrer que l'application $(a, b, c) \mapsto (7 - a, 7 - b, 7 - c)$ est une bijection de A sur B.
4. En déduire $P(A)$ et $P(B)$.