Exercice 1. En considérant leurs *sommes partielles*, montrer que les séries ci-dessous convergent et calculer leur somme.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+3^n}{6^n}$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$.
7. $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{\ln(n^n)\ln((n+1)^{n+1})}$

Pour chacune des séries de cet exercice, il est possible de calculer les sommes partielles de la série, soit parce qu'il y a un télescopage, soit parce qu'il s'agit d'une somme géométrique. Étudier la convergence de la série revient donc à étudier la convergence d'une suite. *Ainsi, cet exercice n'est pas vraiment un exercice sur les séries, mais plutôt un exercice sur les suites.*

Remarque : Les fréquents télescopages dans les calculs qui suivent sont indiqués par un (T) à droite du résultat.

1. On a
$$\frac{1}{(2X-1)(2X+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2X-1} - \frac{1}{2X+1}\right)$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \quad (T)\\ &\longrightarrow \frac{1}{2} \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty\end{aligned}$$
La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est donc convergente, et
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

2. On a
$$\frac{X}{(X+1)(X+2)(X+3)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{X+1} + 2\frac{1}{X+2} - \frac{3}{2}\frac{1}{X+3}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2} - \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+3} \\
&= -\frac{1}{2}\left(H_n + \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(H_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - 1\right) \\
&\quad -\frac{3}{2}\left(H_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - 1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} + o(1) \\
&\longrightarrow \frac{1}{4} \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est donc convergente, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{4}$$

3. On a

$$\frac{2X+1}{X^2(X+1)^2} = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{(X+1)^2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \quad (T) \\
&\longrightarrow 1 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est donc convergente, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$$

4. On a

$$\frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}$$

Les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ sont des séries géométriques de raisons $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, elles sont donc convergentes. Par linéarité, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{3}{2} + 2 \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

5. On a

$$u_n = \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(n+1)}$ est convergente, de somme $\frac{1}{2}$ (voir 1.1, 1.2, c'est pareil). La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n+1}}$ est une série géométrique convergente, de somme $\frac{1}{2}$. Par linéarité, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

6. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^k}{k+1} \right) \\
&= 1 - \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (T) \\
&\longrightarrow 1 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est donc convergente, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$$

7. Celle-ci a l'air terrible mais il n'en est rien. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{\ln(n^n)\ln((n+1)^{n+1})} &= \frac{n\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(n+1)}{n(n+1)\ln n \ln(n+1)} \\
&= \frac{n(\ln(n+1) - \ln n) + \ln(n+1)}{n(n+1)\ln n \ln(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{n(n+1)\ln n \ln(n+1)} \\
&= \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \\
&= \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \quad (T) \\
&\longrightarrow \frac{1}{2\ln 2} \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est donc convergente, et

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \frac{1}{2\ln 2}$$

Exercice 2. En considérant son *terme général*, déterminer si la série de terme général u_n est convergente ou divergente.

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$, $n \geq 1$.
2. $u_n = \sin \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$, $n \geq 0$.
4. $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \geq 0$.
5. $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n+1}}$, $n \geq 1$.
6. $u_n = \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$.
7. $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3-1}$, $n \geq 1$.
8. $u_n = \frac{1}{10000n+1}$, $n \geq 0$.
9. $u_n = \frac{n}{e^{n^2}}$, $n \geq 0$.
10. $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$, $n \geq 1$.
11. $u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx$, $n \geq 1$.
12. $u_n = \ln(n \sin \frac{1}{n})$, $n \geq 1$.
13. $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, $n \geq 1$.

Remarque : Toutes les séries de cet exercice, sauf peut-être la douzième, sont à termes positifs. Cet exercice utilise de façon répétée les résultats suivants du cours :

- Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, alors cette série diverge.
- Si deux séries ont leurs termes généraux équivalents et que l'une est à termes positifs pour n assez grand, alors l'autre aussi pour n assez grand, et les deux séries convergent ou divergent simultanément.
- Si le terme général d'une série est positif pour n assez grand, et est majoré par le terme général d'une série convergente à termes positifs pour n assez grand, alors la première série converge.
- Si le terme général d'une série est minoré par le terme général d'une série divergente à termes positifs pour n assez grand, alors la première série diverge.

Dans le corrigé qui suit, on se contente de majorer, minorer, ou trouver un équivalent. On laisse au lecteur le soin de voir comment les résultats ci-dessus sont utilisés.

1. $u_n \sim \frac{1}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente.
2. $u_n \sim \frac{1}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente.
3. $0 \leq u_n \leq \frac{3}{2^n}$. u_n est donc positif et majoré par le terme général d'une série géométrique convergente.
4. On a $n^4 = o(2^n)$. Ainsi, pour tout n assez grand, $\frac{n^4}{2^n} \leq 1$, et $u_n \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente.
5. On vérifie aisément que $\sqrt[n]{n+1}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, $u_n \sim \ln n$. Donc u_n tend vers $+\infty$: la série diverge grossièrement.
6. $u_n \sim \frac{\ln n}{n^{3/2}}$. Or, $\ln n = o(n^{1/4})$, donc $\frac{\ln n}{n^{1/4}} \leq 1$ pour n assez grand. Il en résulte, toujours pour n assez grand, que
$$\frac{\ln n}{n^{3/2}} \leq \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$
Comme $\frac{5}{4} > 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^{5/4}}$ est une série de Riemann convergente. La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est donc convergente.
7. $u_n \sim \frac{1}{n^{5/2}}$, terme général d'une série de Riemann convergente.
8. $u_n \sim \frac{1}{10000n}$, terme général d'une série de Riemann divergente.

9. On a $n^4 = o(e^{n^2})$. Ainsi, pour tout n assez grand, $u_n \leq \frac{1}{n^3}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. La série converge.
10. Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [0, \frac{1}{n}]$, on a $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leq \sqrt{x}$. Ainsi,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$$

On a là le terme général d'une série de Riemann convergente. Ainsi, par comparaison, la série de terme général u_n converge.
11. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq e^{-\sqrt{n}}$. Or, $e^{-\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$, donc, pour tout n assez grand, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$. On a là le terme général d'une série de Riemann convergente. Ainsi, par comparaison, la série de terme général u_n converge.
12. On a $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})$. Ainsi,

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim -\frac{1}{3n^2}$$

On en déduit que, pour tout n assez grand, u_n est négatif. De plus, comme la série de terme général $-\frac{1}{3n^2}$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
13. u_n tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini : la série diverge grossièrement.

Exercice 3. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?

1. $u_n = \frac{\cos n}{n^2+1}$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \frac{n\cos n + (-1)^n}{n^3}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \frac{(-1)^n n^{37}}{(n+1)!}$, $n \geq 0$.

1. $|u_n| \leq \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente. La série converge absolument.
2. $|u_n| \leq \frac{n+1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente. La série converge absolument.
3. $|u_n| = \frac{n^{37}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout n assez grand. En effet, $n^{39} = o((n+1)!)$, donc $\frac{n^{39}}{(n+1)!} \leq 1$ pour tout n assez grand. La série converge absolument.

Exercice 4. Calculer la somme des séries 3, 4 et 11 de l'exercice 2.

Exercice 5. Règle de d'Alembert.

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}_+$ lorsque n tend vers l'infini.

1. On suppose que $\ell < 1$. On pose $q = \frac{\ell+1}{2}$. Montrer
   (a) Pour tout n assez grand $u_{n+1} \leq q u_n$.
   (b) Il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout n assez grand $0 \leq u_n \leq K q^n$.
   (c) La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

2. On suppose que $\ell > 1$. On pose $q = \frac{\ell+1}{2}$. Montrer
   (a) Pour tout n assez grand $u_{n+1} \geq q u_n$.
   (b) Il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout n assez grand $u_n \geq K q^n \geq 0$.
   (c) La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
3. Montrer par deux exemples que si $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

---

1. (a) Remarquons que $\ell < q < 1$. Soit $\varepsilon = 1 - q > 0$. Appliquons la définition de limite. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$,
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq \varepsilon$$
En particulier, pour $n \geq N$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \leq \varepsilon$$
ou encore
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon = q$$
En multipliant par u_n on obtient le résultat demandé.
   (b) Une récurrence facile sur n montre que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq q^{n-N} u_N$ ou encore, en posant $K = u_N/q^N$, $u_n \leq K q^n$.
   (c) La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs et, pour tout n assez grand, u_n est majoré par le terme général d'une série géométrique convergente.
2. (a) Remarquons que $1 < q < \ell$. Soit $\varepsilon = q - 1 > 0$. Appliquons la définition de limite. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$,
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq \varepsilon$$
En particulier, pour $n \geq N$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \geq -\varepsilon$$
ou encore
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon = q$$
En multipliant par u_n on obtient le résultat demandé.
   (b) Une récurrence facile sur n montre que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq q^{n-N} u_N$ ou encore, en posant $K = u_N/q^N$, $u_n \geq K q^n$.
   (c) La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs et, pour tout n assez grand, u_n est minoré par le terme général d'une série géométrique divergente.
3. Considérons les séries de Riemann. Prenons, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{n^\alpha}{n^\alpha} = 1$$
On est donc dans le cas où $\ell = 1$. Cependant, si $\alpha > 1$ la série converge, alors que si $\alpha \leq 1$, la série diverge.

Exercice 6. Appliquer la règle de d'Alembert aux séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

1. $u_n = \frac{n!}{2^{2n}}$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \frac{n!^2}{(2n)!}$, $n \geq 0$.
3. $u_n = \frac{1000^n}{n!}$, $n \geq 0$.
4. $u_n = \frac{n!}{2^{2^n}}$, $n \geq 0$.
5. $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}$, $n \geq 0$.

1. Les u_n sont bien strictement positifs. On peut donc tenter la règle de d'Alembert (de même pour les autres séries de l'exercice). On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!2^{2n}}{n!2^{2n+2}} = \frac{n+1}{4} \to +\infty$$
lorsque n tend vers l'infini. Comme $+\infty > 1$, la série diverge.
2. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!^2(2n)!}{(2n+2)!n!^2} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4}$$
Comme $\frac{1}{4} < 1$, la série converge.
3. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1000}{n+1} \to 0$$
Comme $0 < 1$, la série converge.
4. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{2^n}} \to 0$$
Comme $0 < 1$, la série converge.

Exercice 7. On considère le réarrangement suivant de la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, où trois termes positifs sont suivis de deux termes négatifs :
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

1. On note v_n le $n$ième terme de la série ci-dessus, en convenant de commencer à $n = 0$. Que vaut précisément v_n ?
2. Montrer que les sommes partielles S_{5n-1} de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent. Calculer leur limite ℓ.
3. Montrer que la série est convergente, de somme ℓ.

1. Les choses sont clairement à regarder de 5 en 5. Commençons par v_{5n}. On a $v_0 = \frac{1}{1}$, $v_5 = \frac{1}{7}$, $v_{10} = \frac{1}{13}$. Plus généralement, pour tout $n \geq 0$, $v_{5n} = \frac{1}{6n+1}$. De même,
   - $v_{5n} = \frac{1}{6n+1}$
   - $v_{5n+1} = \frac{1}{6n+3}$
   - $v_{5n+2} = \frac{1}{6n+5}$
   - $v_{5n+3} = -\frac{1}{4n+2}$
   - $v_{5n+4} = -\frac{1}{4n+4}$

2. On a

$$\begin{aligned}
S_{5n-1} &= \sum_{k=0}^{5n-1} v_k \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (v_{5j} + v_{5j+1} + v_{5j+2} + v_{5j+3} + v_{5j+4}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6j+1} + \frac{1}{6j+3} + \frac{1}{6j+5} - \frac{1}{4j+2} - \frac{1}{4j+4} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6j+1} + \frac{1}{6j+3} + \frac{1}{6j+5} \right) - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4j+2} + \frac{1}{4j+4} \right) \\
&= S_1 - S_2
\end{aligned}$$

Posons, pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La deuxième somme S_2 vaut

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}H_{2n}$$

Quant à la première somme, elle vaut

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{6n-1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{6n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{6n}\right) \\
&= H_{6n} - \frac{1}{2}H_{3n}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$S_{5n-1} = H_{6n} - \frac{1}{2}H_{3n} - \frac{1}{2}H_{2n}$$

Maintenant, le cours nous apprend que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler. On a donc

$$\begin{aligned}
S_{5n-1} &= \ln(6n) + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}(\ln(3n) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(2n + \gamma + o(1)) \\
&= \ln 6 - \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 + o(1) \\
&= \ln\sqrt{6} + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $S_{5n-1} \to \ell = \ln\sqrt{6}$ lorsque n tend vers l'infini.

3. On a $S_{5n} = S_{5n-1} + v_{5n} = S_{5n-1} + o(1)$ donc $S_{5n} \to \ell$ lorsque n tend vers l'infini. Il en est de même pour S_{5n+1}, S_{5n+2}, S_{5n+3} et S_{5n+4}. Ainsi, par la réciproque améliorée du théorème sur les suites extraites, $S_n \to \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

Remarque : Une lecture hâtive du cours de maths pourrait faire croire que les sommes de séries se comportent comme des sommes normales. Il n'en est rien. Bien au contraire, le cours cherche à découvrir *dans quelles situations* les sommes de séries se comportent comme des sommes normales. Et quelques exercices sont là pour nous rappeler à la réalité. Ainsi, dans cet exercice, nous sommes partis de la série harmonique alternée, de somme $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. Nous avons mélangé les termes de cette série et nous avons obtenu une série de somme $\ln\sqrt{6}$. Ainsi, « l'addition infinie n'est pas commutative ». Un cours plus poussé chercherait alors des conditions sur une série pour que toute permutation de ses termes fournisse une série de même type (convergente, divergente) et de même somme en cas de convergence. Il s'avère, et c'est loin d'être évident, que cette condition est la convergence absolue.

Exercice 8. Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to I$. On suppose qu'il existe un réel k, $0 \le k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \le k|y - x|$$

Une telle fonction est dite k-contractante.

1. Montrer que f admet au plus un point fixe.

   Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_n)_{n\ge 0}$ de points de I définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
2. Montrer que pour tout $n \ge 0$, $|x_{n+1} - x_n| \le k^n|x_1 - x_0|$.
3. En déduire que la série $\sum_{n\ge 0}(x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente, puis que la suite (x_n) est convergente.
4. Soit ℓ la limite de la suite (x_n). Montrer que $\ell \in I$ et que ℓ est un point fixe de f.
5. Montrer que pour tout $n \ge 0$, $|x_n - \ell| \le k^n|x_0 - \ell|$.

1. Soient $x, x' \in I$. Supposons que $f(x) = x$ et $f(x') = x'$. On a alors

   $$|x - x'| = |f(x) - f(x)'| \le k|x - x'|$$

   d'où

   $$(1 - k)|x - x'| \le 0$$

   Comme $1 - k > 0$, on en déduit que $|x - x'| \le 0$, et donc que $x = x'$. D'où l'unicité du point fixe, s'il existe.
2. Soit $n \ge 1$. On a

   $$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le k|x_n - x_{n-1}|$$

   On en déduit par une récurrence facile sur n la propriété demandée.
3. Le terme général de la série $\sum_{n\ge 0}|x_{n+1} - x_n|$ est donc majoré par le terme général d'une série géométrique de raison $0 \le k < 1$. Cette série géométrique est donc convergente et, par comparaison, la série $\sum_{n\ge 0}|x_{n+1} - x_n|$ converge. Ainsi, la série $\sum_{n\ge 0}(x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Par un résultat vu en cours, ceci entraîne la convergence de la suite $(x_n)_{n\ge 0}$ vers un réel ℓ.
4. Les x_n appartiennent à I. Comme I est fermé, il en résulte que $\ell \in I$ (considérer tous les cas d'intervalles fermés).

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. L'application f est k-lipschitzienne, donc continue, sur I. Comme $\ell \in I$, f est continue en ℓ : par le théorème de caractérisation séquentielle des limites, il en résulte que lorsque n tend vers l'infini, $f(x_n)$ tend vers $f(\ell)$. Par les théorèmes maintenant classiques (suites extraites, unicité de la limite), il vient $f(\ell) = \ell$. La fonction f admet donc au moins (et donc un seul par la première question) point fixe.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \leq k|x_n - \ell|$$
On démontre alors par une récurrence facile la propriété demandée.

Exercice 9. Même exercice que le précédent mais cette fois-ci, $f : F \to F$ où $F \subset \mathbb{C}$ vérifie la propriété suivante : pour toute suite (z_n) de points de F convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$, on a $\ell \in F$ (un tel ensemble F est dit *fermé*). Que doit-on changer aux démonstrations faites dans l'exercice précédent ?

1. Inchangé. Bien entendu les barres verticales désignent maintenant des modules.
2. Inchangé.
3. Inchangé.
4. Là il faut modifier un peu ce que nous avons dit dans l'exercice précédent, parce que nous ne savons pas ce qu'est une fonction continue d'une *variable complexe*. Supposons donc que $z_n \to \ell$ lorsque n tend vers l'infini. On a $|f(z_n) - f(\ell)| \leq k|z_n - \ell|$. Le majorant tend vers 0, on en déduit au moyen du théorème d'encadrement que $f(z_n)$ tend vers $f(\ell)$.
5. Inchangé.