Exercice 1. En considérant leurs *sommes partielles*, montrer que les séries ci-dessous convergent et calculer leur somme.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+3^n}{6^n}$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$.
7. $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{\ln(n^n)\ln((n+1)^{n+1})}$

Exercice 2. En considérant son *terme général*, déterminer si la série de terme général u_n est convergente ou divergente.

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$, $n \geq 1$.
2. $u_n = \sin\frac{1}{n}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$, $n \geq 0$.
4. $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \geq 0$.
5. $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n+1}}$, $n \geq 1$.
6. $u_n = \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$.
7. $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3-1}$, $n \geq 1$.
8. $u_n = \frac{1}{10000n+1}$, $n \geq 0$.
9. $u_n = \frac{n}{e^{n^2}}$, $n \geq 0$.
10. $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$, $n \geq 1$.
11. $u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$, $n \geq 1$.
12. $u_n = \ln(n\sin\frac{1}{n})$, $n \geq 1$.
13. $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, $n \geq 1$.

Exercice 3. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?

1. $u_n = \frac{\cos n}{n^2+1}$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \frac{n\cos n+(-1)^n}{n^3}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \frac{(-1)^n n^{37}}{(n+1)!}$, $n \geq 0$.

Exercice 4. Calculer la somme des séries 3, 4 et 11 de l'exercice 2.

Exercice 5.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
2. Démontrer que deux façons différentes que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Exercice 6. Règle de d'Alembert.

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}_+$ lorsque n tend vers l'infini.

1. On suppose que $\ell < 1$. On pose $q = \frac{\ell+1}{2}$. Montrer
   (a) Pour tout n assez grand $u_{n+1} \leq qu_n$.
   (b) Il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout n assez grand $0 \leq u_n \leq Kq^n$.
   (c) La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
2. On suppose que $\ell > 1$. On pose $q = \frac{\ell+1}{2}$. Montrer
   (a) Pour tout n assez grand $u_{n+1} \geq qu_n$.
   (b) Il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout n assez grand $u_n \geq Kq^n \geq 0$.
   (c) La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
3. Montrer par deux exemples que si $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 7. Appliquer la règle de d'Alembert aux séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

1. $u_n = \frac{n!}{2^{2n}}$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \frac{n!^2}{(2n)!}$, $n \geq 0$.
3. $u_n = \frac{1000^n}{n!}$, $n \geq 0$.
4. $u_n = \frac{n!}{2^{2^n}}$, $n \geq 0$.
5. $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}$, $n \geq 0$.

Exercice 8. On considère le réarrangement suivant de la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, où trois termes positifs sont suivis de deux termes négatifs :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

1. On note v_n le $n$ième terme de la série ci-dessus, en convenant de commencer à $n = 0$. Que vaut précisément v_n ?
2. Montrer que les sommes partielles S_{5n-1} de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent. Calculer leur limite ℓ.
3. Montrer que la série est convergente, de somme ℓ.

Exercice 9. Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to I$. On suppose qu'il existe un réel k, $0 \leq k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$$

Une telle fonction est dite k-contractante.

1. Montrer que f admet au plus un point fixe.

   Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de I définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|$.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0}(x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente, puis que la suite (x_n) est convergente.
4. Soit ℓ la limite de la suite (x_n). Montrer que $\ell \in I$ et que ℓ est un point fixe de f.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|x_n - \ell| \leq k^n|x_0 - \ell|$.

Exercice 10. Même exercice que le précédent mais cette fois-ci, $f : F \to F$ où $F \subset \mathbb{C}$ vérifie la propriété suivante : pour toute suite (z_n) de points de F convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$, on a $\ell \in F$ (un tel ensemble F est dit *fermé*). Que doit-on changer aux démonstrations faites dans l'exercice précédent ?