Exercice 1. Soient a et b deux réels, $a < b$. Calculer $\int_a^b \lfloor x \rfloor \, dx$ dans les deux cas suivants :

1. a et b sont entiers.
2. a et b sont quelconques.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x) \, dx$.

1. Montrer que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
2. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.
   Indication : intégrer par parties.

Exercice 3. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{I}_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$$

1. Trouver une relation simple entre $\mathcal{I}_{m,n}$ et $\mathcal{I}_{m+1,n-1}$, pour $m \geq 0, n \geq 1$.
2. En déduire la valeur de $\mathcal{I}_{m,n}$ en fonction de m et n.

Exercice 4. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} \, dt$.

1. Prouver que $u_n \sim \frac{1}{4n}$ lorsque $n \to \infty$.
2. Soit $v_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Calculer v_n en fonction de u_n.
3. En déduire la limite, lorsque $n \to \infty$, de $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 5. Déterminer la limite éventuelle des suites dont le terme général est donné ci-dessous. Toutes ces suites sont liées à des sommes de Riemann.

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n}$
2. $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}$
3. $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \ln(1 + \frac{k}{n})$
4. $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{k}{k^2+n^2}$
5. $n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$

Exercice 6. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7. Montrer que le résultat précédent reste valable si, au lieu de supposer f de classe $\mathcal{C}^1$, on la suppose en escalier. En déduire que le résultat reste vrai pour toute fonction continue par morceaux.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et positive.

1. Montrer l'existence du minimum et du maximum de f sur $[a,b]$. On note m et M ce minimum et ce maximum.
2. Montrer que $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$.
3. En déduire la *première formule de la moyenne* : il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$$

Exercice 9. [$\star$] Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculer à l'aide de sommes de Riemann l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x \cos t + x^2) \, dt$$

Exercice 10. [$\star$] Soit f continue sur $[a,b]$ ($a < b$). Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(\int_a^b |f(t)|^n \, dt \right)^{\frac{1}{n}}$. On pose $M = \max\{|f(x)|, a \leq x \leq b\}$. On se donne un réel $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$. En déduire que pour tout n assez grand, on a $u_n \leq M + \varepsilon$.
2. Montrer que pour tout entier n assez grand, on $u_n \geq M - \varepsilon$. On pourra introduire un réel c tel que $|f(c)| = M$, puis considérer $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in [c-\delta, c+\delta]$, $f(x) \geq M - \varepsilon/2$.
3. En déduire que u_n possède une limite lorsque n tend vers l'infini, et calculer cette limite.

Exercice 11. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $f'' \geq 0$. Déterminer le signe de $\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt$.

Exercice 12. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$, continue, non identiquement nulle, et telle que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$.

Exercice 13. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Soient $m = \min\{f(x), x \in [a,b]\}$ et $M = \max\{f(x), x \in [a,b]\}$. On suppose que $m > 0$.

1. Montrer que
$$2\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a) \leq \frac{1}{M}\int_a^b f + m\int_a^b \frac{1}{f} \leq \left(1 + \frac{m}{M}\right)(b-a)$$
Indication : On pourra étudier la fonction $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \frac{t}{M} + \frac{m}{t}$.
2. Montrer que
$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f} \leq (b-a)^2 \frac{(m+M)^2}{4mM}$$
Indication : Pour la première inégalité, utiliser Schwarz. Pour la deuxième inégalité, on pourra remarquer que $\left(\left(\int_a^b f\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{mM}\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \geq 0$, puis utiliser la question précédente.

Exercice 14. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue on a $\int_a^b fg = 0$. Montrer que $f = 0$.
2. On suppose que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ on a $\int_a^b fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 15. Trouver la limite lorsque x tend vers 1, $x > 1$, de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Indication : $\frac{1}{\ln t} = \frac{t}{t \ln t}$, puis IPP.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$ et on note
$$M = \sup\{|f''(x)|, x \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M \geq 0$.
2. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}$.

Exercice 17. Égalité de Taylor-Lagrange. Soit $n \geq 0$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, et que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

1. Démontrer l'existence d'un réel λ tel que $\varphi(a) = \varphi(b)$. On suppose un tel λ choisi dans la question suivante.
2. Appliquer le théorème de Rolle à φ et en déduire l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ il existe un unique réel $\theta \in]0,1[$ (qui dépend de x) tel que
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta x)$$
2. Déterminer la limite éventuelle de θ lorsque x tend vers 0.