Exercice 1. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{vmatrix}$ où $S_k = \sum_{i=1}^k i$.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$

Exercice 3. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Calculer $D = \begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix}$

Exercice 4. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 5. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 6. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} n & \cdots & \cdots & n \\ \vdots & n-1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$. Montrer que $\det A$ est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda id_E)$.

1. Montrer que P_f est une fonction polynôme de degré n. Quel est son coefficient dominant ? Son coefficient constant ? Son coefficient de degré $n-1$?
2. Un scalaire λ est une *valeur propre de* f lorsqu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si et seulement si $P_f(\lambda) = 0$. Combien f possède-t-il au plus de valeurs propres ?
3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique a pour coefficients $a_{ij} = i + 3(j-1)$.

Exercice 9. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On se donne également la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.
2. En déduire la valeur de $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}$.

Exercice 10.

1. Soient $n, p \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^p = I_n \implies (\text{Com } A)^p = I_n$.
2. Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{Com } A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\text{Com } A)^{-1} = \text{Com } (A^{-1})$.

Exercice 11. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Exercice 12.

1. Soient $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0$. Montrer que n est pair.
2. Donner un exemple de deux telles matrices lorsque $n = 2$.

Exercice 13. Soit $n \geq 1$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, AB^k = B^k(A + kI)$.
2. En déduire que $\det B = 0$.

Exercice 14. Soit $n \geq 1$. Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \varepsilon \implies A + xB \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 15. On considère le système linéaire

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} x + my + (m-1)z & = & m+1 \\ 3x + 2y + mz & = & 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z & = & m-1 \end{array} \right.$$

où $m \in \mathbb{C}$.

1. Pour quelles valeurs de m le système (S) est-il de Cramer ? Résoudre dans ce cas avec les formules de Cramer.
2. Résoudre dans les cas restants avec l'algorithme du pivot de Gauss.

Exercice 16. Résoudre le système linéaire ci-dessous (le paramètre a est un nombre complexe).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + ay + a^2 z & = & 0 \\ \overline{a}x + y + az & = & 0 \\ \overline{a}^2 x + \overline{a}y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 17. On considère les deux systèmes

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{lcl} 10x + 9y + z & = & -50 \\ 9x + 10y + 5z & = & 40 \\ x + 5y + 9z & = & 180 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_2) \left\{ \begin{array}{lcl} 10x + 9y + z & = & -50 \\ 9x + 10y + 5z & = & 41 \\ x + 5y + 9z & = & 180 \end{array} \right.$$

Résoudre ces deux systèmes et commenter le résultat obtenu.