Exercice 1. Calculer pour les permutations ci-dessous : leur décomposition en produit de cycles de supports disjoints, une décomposition en produit de transpositions, leur ordre, leur inverse, leur signature.

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
2. $\sigma = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5)(4\ 5\ 6)$
3. $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 4\ 5)(3\ 4\ 5\ 6)$
4. $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^{-1}$

Exercice 2. Pour quelles valeurs de n le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est-il *abélien* ? Même question pour le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $n \geq 3$, le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est *engendré* par les 3-cycles (i.e. toute permutation paire est un produit de 3-cycles).

Exercice 4.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que σ commute avec toutes les permutations si et seulement si σ commute avec toutes les transpositions.
2. Trouver le *centre* de $\mathfrak{S}_n$, c'est à dire les permutations qui commutent avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 5. Déterminer de même le centre de $\mathfrak{A}_n$. On fera appel à des 3-cycles.

Exercice 6. Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un produit de transpositions du type $(i\ (i+1))$ où $i \in [\![1, n-1]\!]$.

Exercice 7. Montrer que la transposition $\tau = (1\ 2)$ et le cycle $\gamma = (1\ 2 \dots\ n)$ *engendrent* $\mathfrak{S}_n$, c'est à dire que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un produit où n'apparaissent que les permutations τ, γ et γ^{-1}.

Exercice 8. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\gamma = (x_1\ \dots\ x_k)$ un cycle de longueur k.

1. Montrer que $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ est un cycle que l'on déterminera.
2. Application : calculer $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(2\ 3\ 4\ 5\ 6)(5\ 4\ 3\ 2\ 1)$.
3. Inversement, soient γ et γ' deux cycles de même longueur k dans $\mathfrak{S}_n$. Existe-t-il $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\gamma' = \sigma\gamma\sigma^{-1}$?

Exercice 9. Soit $(G, \times)$ un groupe fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $g \in G$, on note τ_g l'application $G \longrightarrow G$ définie pour tout $x \in G$ par $\tau_g(x) = gx$.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, $\tau_g \in \mathfrak{S}(G)$.
2. Soit $\tau : G \longrightarrow \mathfrak{S}(G)$ définie par $\tau(g) = \tau_g$. Démontrer que τ est un morphisme injectif de groupes.
3. Démontrer le *théorème de Cayley* : tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 10. Montrer que les transpositions $(1\ i)$, $i \in [\![2, n]\!]$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 11. Soit $f : (\mathfrak{S}_n, \circ) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ un morphisme de groupes.

1. Soit τ une transposition. Que vaut $f(\tau)$?

2. Soient τ, τ' deux transpositions. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$.
3. En déduire que toutes les transpositions ont même image par f.
4. Déterminer f.

Exercice 12. Soit $n \geq 2$. Soit $\gamma = (1\ 2 \dots\ n)$. Déterminer toutes les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui commutent avec γ.

Exercice 13. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer σ^{2025}.

Exercice 14. Soient γ et γ' deux cycles de $\mathfrak{S}_n$.

1. On suppose que γ et γ' commutent. Montrer que les supports de γ et γ' sont soit égaux, soit disjoints.
2. Étudier la réciproque.