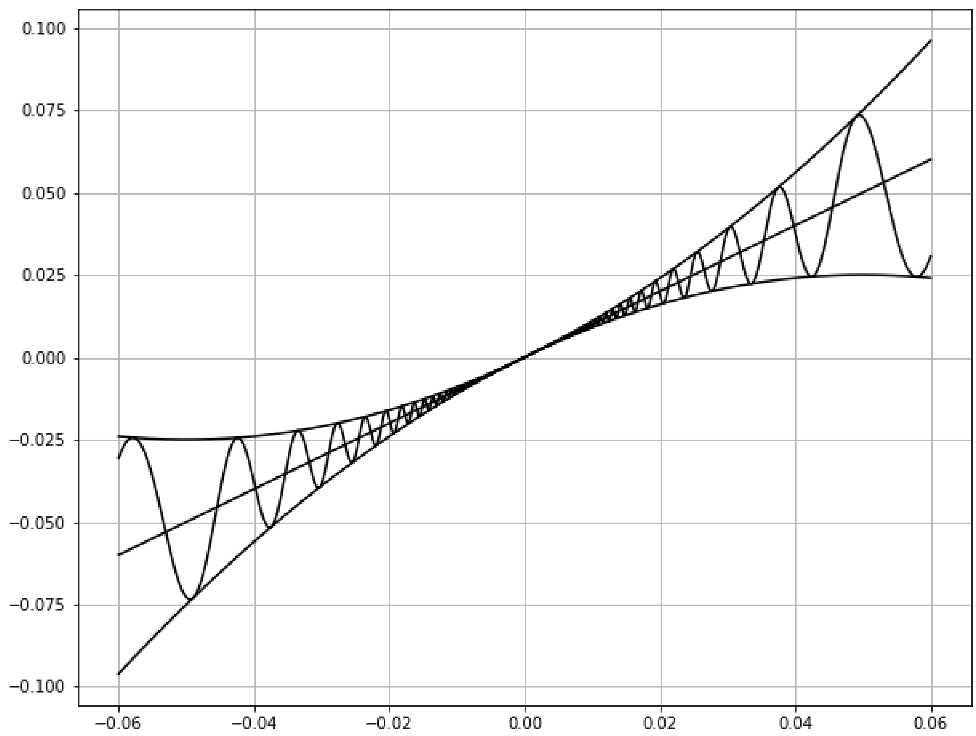
Exercice 1. Comparer les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

1. $x \ln x$ et $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0.
2. $x \ln x$ et $\sqrt{x^2+3x}\ln(x^2)$ au voisinage de $+\infty$.
3. $\frac{1}{x+1}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de -1.

1. On a
$$\frac{x\ln x}{\ln(1+2x)} \sim_0 \frac{x\ln x}{2x} = \frac{1}{2}\ln x \to -\infty$$
lorsque $x \to 0$. Donc $\ln(1+2x) = o(x\ln x)$.
2. On a $\sqrt{x^2+3x}\ln(x^2) \sim_{+\infty} 2\sqrt{x^2}\ln(x) = 2x\ln x$, donc
$$x\ln x = O_{+\infty}(\sqrt{x^2+3x}\ln(x^2))$$
mais aussi
$$\sqrt{x^2+3x}\ln(x^2) = O_{+\infty}(x\ln x)$$
3. Remarquons que, au voisinage de -1, $\ln(1+\frac{1}{x})$ n'est défini que pour $x < -1$. Posons donc $x = -1-h$, de sorte que $h > 0$ et $h \to 0$ lorsque $x \to -1$. On a
$$\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{h}$$
et
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{1+h}\right) = \ln\frac{h}{1+h} \sim \ln h$$
Ainsi,
$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x+1}} \sim -h\ln h \to 0$$
lorsque h tend vers 0. Donc
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = o_{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Exercice 2. Vrai ou faux ? Si f et g sont équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et g est croissante au voisinage de a, alors f est croissante au voisinage de a.

Faux. l'exemple idiot est $f(x) = 1+x$ et $g(x) = 1-x$, au voisinage de 0. Mais même pour deux fonctions qui tendent vers 0, c'est faux. Prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x + 10x^2\sin\frac{1}{x}$. f et g sont équivalentes au voisinage de 0 et f est croissante. mais pour tout $x \neq 0$,
$$g'(x) = 1 + 20x\sin\frac{1}{x} - 10\cos\frac{1}{x}$$
qui prend des valeurs positives et des valeurs négatives dans tout voisinage de 0. Ci-dessous, les courbes de f et g au voisinage de 0. La courbe de g est encadrée par $x \pm 10x^2$, représenté également sur le dessin.



Exercice 3. On se donne deux fonctions f et g strictement positives équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Vrai ou faux ?

1. Si f (et donc g) tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ au point a, alors $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.
2. Si f (et donc g) tend vers $+\infty$ au point a, alors $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.
3. Si f (et donc g) tend vers 0 au point a, alors $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.
4. Si f (et donc g) tend vers 1 au point a, alors $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.

1. Vrai mais dans ce cas un calcul d'équivalents n'a aucun intérêt :
$$\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} \to \frac{\ln \ell}{\ln \ell} = 1 \text{ lorsque } x \to a$$
2. Vrai. En effet,
$$\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1 + \frac{\ln \frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}$$
Dans le quotient, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers $+\infty$. Donc
$$\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} \to 1 \text{ lorsque } x \to a$$
3. Vrai. Même démonstration que pour le point précédent.
4. Faux. Prenons par exemple $f(x) = 1 + x^2$ et $g(x) = 1 + x$. f et g sont équivalentes en 0. On a cependant $\ln f(x) \sim_0 x^2$ et $\ln g(x) \sim_0 x$, qui ne sont pas équivalents lorsque $x \to 0$.

Exercice 4. On se donne deux fonctions f et g équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Vrai ou faux ?

1. Si f (et donc g) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ au point a, alors $e^f \sim e^g$ au voisinage de a.
2. Si f (et donc g) tend vers $+\infty$ au point a, alors $e^f \sim e^g$ au voisinage de a.
3. Si f (et donc g) tend vers $-\infty$ au point a, alors $e^f \sim e^g$ au voisinage de a.

---

1. Vrai mais dans ce cas un calcul d'équivalents n'a aucun intérêt :
$$\frac{e^f}{e^g} \to \frac{e^\ell}{e^\ell} = 1 \text{ lorsque } x \to a$$
2. Faux. Prendre par exemple $a = +\infty$, $f(x) = x$ et $g(x) = x + \sqrt{x}$. On a $f \sim g$ alors que $e^f = o(e^g)$.
3. Faux. Prendre par exemple $a = +\infty$, $f(x) = -x^2$ et $g(x) = -x^2 + x$.

Exercice 5. Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $a = 0$, $f(x) = x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$.
2. $a = 0$, $f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$.
3. $a = 0$, $f(x) = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$.
4. $a = 0$, $f(x) = \left(1 + 3\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x \sin x}}$.
5. $a = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \tan(2x)\ln(\tan x)$.
6. $a = +\infty$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}\tan\frac{1}{x}$.

---

1. $$x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} \sim_0 \frac{x \times 3\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3\sqrt{3}$$
Donc $f(x) \to 3\sqrt{3}$ lorsque $x \to 0$.
2. On a
$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\cos x\right)$$
Pour commencer, $\ln\cos x = \ln(1 + (\cos x - 1))$. Comme $\cos x - 1$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on en déduit $\ln\cos x \sim_0 \cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$. Ainsi, $\frac{1}{x^2}\ln\cos x \sim_0 -\frac{1}{2}$, donc tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque $x \to 0$. Finalement,
$$f(x) \to e^{-\frac{1}{2}} \text{ lorsque } x \to 0$$
3. $$f(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{x - \sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right)$$
Tout d'abord, $\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \ln(1+u)$ où $u = \frac{x}{\sin x} - 1$ tend vers 0 lorsque $x \to 0$. Donc
$$\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim_0 u = \frac{x}{\sin x} - 1 = \frac{x - \sin x}{\sin x}$$
De là, $f(x) = \exp v$ où
$$v \sim_0 \frac{x - \sin x}{\sin x}\frac{\sin x}{x - \sin x} = 1$$
Ainsi, $f(x) \to e$ lorsque $x \to 0$.

4. On a
$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x\sin x}\ln\left(1+3\tan^2 x\right)\right)$$
On regarde d'abord l'exposant.
$$\frac{1}{x\sin x}\ln\left(1+3\tan^2 x\right) \sim_0 \frac{1}{x^2}3\tan^2 x \sim_0 \frac{1}{x^2}3x^2 = 3$$
Donc $f(x) \to e^3$ lorsque $x \to 0$.
5. On pose $x = \frac{\pi}{4} + h$, de sorte que $h \to 0$. On a
$$f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + 2h)\ln(\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right))$$
Tout d'abord, $\ln(\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)) = \ln(1+u)$ où $u = \tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - 1$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Regardons u de plus près.
$$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - 1 = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan h}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan h} - 1 = \frac{1+\tan h}{1-\tan h} - 1 = \frac{2\tan h}{1-\tan h} \sim_0 2\tan h \sim_0 2h$$
Par ailleurs,
$$\tan(\frac{\pi}{2}+2h) = -\frac{1}{\tan(2h)} \sim_0 -\frac{1}{2h}$$
De là,
$$f(\frac{\pi}{4}+h) \sim_0 -\frac{1}{2h}2h = -1$$
et donc $f(x) \to -1$ lorsque $x \to \frac{\pi}{4}$.
6. on a
$$f(x) \sim_{+\infty} \sqrt{x^2}\frac{1}{x} = 1$$
donc $f(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 6. Calculer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $a = 0$, $f(x) = \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$
2. $a = 0$, $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$
3. $a = 0$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$
4. $a = e$, $f(x) = \frac{e^x - x^e}{(x-e)^2}$

1.
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^5}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{6}\right) \\ &= \frac{1}{x^5}\left(\frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \\ &= \frac{1}{120} + o(1) \\ &\to \frac{1}{120} \text{ lorsque } x \to 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)\\
&= \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2}\right)\\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\\
&= \frac{1}{3} + o(1)\\
&\to \frac{1}{3} \text{ lorsque } x \to 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}\\
&= \frac{1}{x^2\tan^2 x}\left(\tan^2 x - x^2\right)\\
&= \frac{1}{x^2\tan^2 x}(\tan x - x)(\tan x + x)\\
&= \frac{1}{x^2\tan^2 x}(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x)(x + o(x) + x)\\
&= \frac{1}{x^2\tan^2 x}(\frac{x^3}{3} + o(x^3))(2x + o(x))\\
&\sim_0 \frac{1}{x^2 \times x^2}\frac{x^3}{3}2x\\
&= \frac{2}{3}\\
&\to \frac{2}{3} \text{ lorsque } x \to 0
\end{aligned}$$

4. Voir dans le cours. On a trouvé

$$e^x - x^e \sim_e \frac{1}{2}e^{e-1}(x-e)^2$$

On en déduit

$$f(x) \sim_e \frac{1}{2}e^{e-1}$$

et donc

$$f(x) \to \frac{1}{2}e^{e-1} \text{ lorsque } x \to e$$

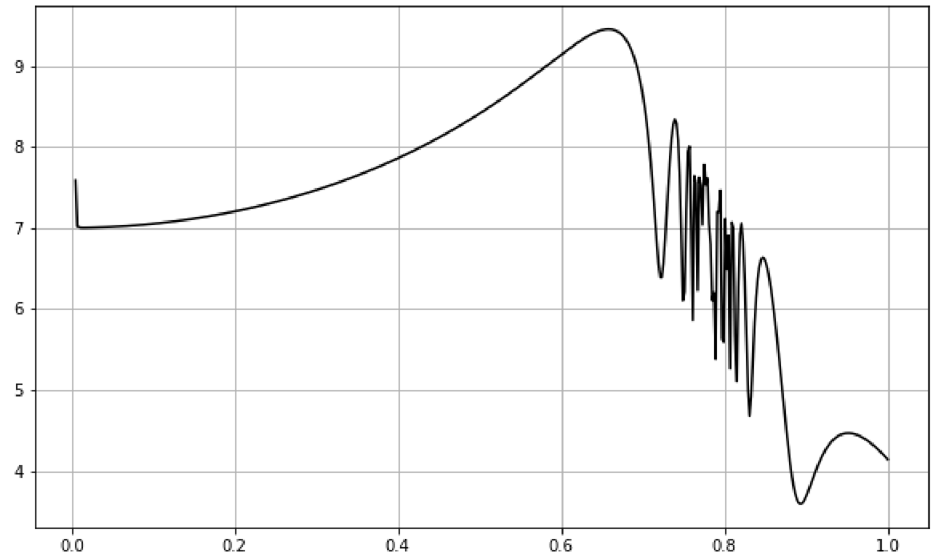
Exercice 7.

1. Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On suppose que $f(x) \sim_0 cx^n$ où $c \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\log_2 \frac{f(2x)}{f(x)}$$

2. On prend $f(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x)$. Au moyen d'une calculatrice, déterminer à quel ordre il faudrait faire un DL de f en 0 pour obtenir un équivalent de f en 0.

1. On a
$$\frac{f(2x)}{f(x)} \sim_0 \frac{2^n c x^n}{c x^n} = 2^n \to 2^n$$
lorsque $x \to 0$. On en déduit que
$$\log_2 \frac{f(2x)}{f(x)} \to n$$
lorsque $x \to 0$.
2. Voici la courbe de $g : x \mapsto \log_2 \frac{f(2x)}{f(x)}$ pour la fonction f de l'énoncé.



On constate que pour de « petites » valeurs de x (pas trop petites tout de même pour éviter les erreurs d'arrondis), $g(x)$ vaut environ 7. Il faudrait donc sans doute faire un DL à l'ordre 7 de f en 0 pour en obtenir un équivalent. C'est effectivement le cas :
$$\sin(\tan x) - \tan(\sin x) \sim_0 -\frac{x^7}{30}$$

Exercice 8. Donner un équivalent en 0 de $(2 + \cos x)(2 + \cosh x) - 9$

Posons $f(x) = (2 + \cos x)(2 + \cosh x) - 9$. Si l'on refait sur f l'expérience de l'exercice précédent, on voit qu'il faut faire un DL à l'ordre 8 en 0 pour obtenir un équivalent. Ce n'est pas si terrible que cela, parce que f est paire. Dans son DL il n'y a donc que des termes de degrés pairs. Allons-y ! Tout d'abord

$$\begin{array}{rclllll} 2+\cos x & = & 3 & -\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{24}x^4 & -\frac{1}{720}x^6 & +\frac{1}{40320}x^8 & +o(x^8) \\ 2+\cosh x & = & 3 & +\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{24}x^4 & +\frac{1}{720}x^6 & +\frac{1}{40320}x^8 & +o(x^8) \end{array}$$

On fait le produit de ces deux DLs en rangeant les coefficients dans un tableau. Seuls les termes de degré inférieur ou égal à 8 sont conservés

x^0	9	$=$	9
x^2	$\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$	$=$	0
x^4	$\frac{3}{24}-\frac{1}{4}+\frac{3}{24}$	$=$	0
x^6	$\frac{3}{720}-\frac{1}{48}+\frac{1}{48}-\frac{3}{720}$	$=$	0
x^8	$\frac{3}{40320}-\frac{1}{1440}+\frac{1}{576}-\frac{1}{1440}+\frac{3}{40320}$	$=$	$\frac{1}{2016}$

Ainsi,

$$f(x) \sim_0 \frac{x^8}{2016}$$

Exercice 9. Déterminer un DL en a à l'ordre n pour la fonction f :

1. $a=0$, $n=2$, $f(x)=\ln(\alpha^x+\beta^x)$ (α,β réels strictement positifs)
2. $a=\pi/4$, $n=2$, $f(x)=\sqrt{\sin x}$
3. $a=0$, $n=3$, $f(x)=e^{\sqrt{1+x}}$
4. $a=0$, $n=4$, $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$

1. On a
$$\alpha^x = e^{x\ln\alpha} = 1 + x\ln\alpha + \frac{1}{2}x^2\ln^2\alpha + o(x^2)$$
et de même pour β^x. De là,
$$\alpha^x+\beta^x = 2 + x(\ln\alpha+\ln\beta) + \frac{1}{2}x^2(\ln^2\alpha+\ln^2\beta)+o(x^2)$$
D'où
$$f(x) = \ln 2 + \ln(1+u)$$
où
$$u = \frac{1}{2}x(\ln\alpha+\ln\beta) + \frac{1}{4}x^2(\ln^2\alpha+\ln^2\beta)+o(x^2)$$
Comme $u\to 0$ lorsque $x\to 0$ on peut faire un DL de $\ln(1+u)$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 2 + u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \\ &= \ln 2 + u - \frac{1}{2}u^2 + o(x^2) \end{aligned}$$
car u est (au moins) de l'ordre de x et, donc, $o(u^2)=o(x^2)$. Poursuivons :
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 2 \\ &\quad +\frac{1}{2}x(\ln\alpha+\ln\beta)+\frac{1}{4}x^2(\ln^2\alpha+\ln^2\beta)+o(x^2) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x(\ln\alpha+\ln\beta)+\frac{1}{4}x^2(\ln^2\alpha+\ln^2\beta)+o(x^2))^2 \\ &\quad +o(x^2) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}x(\ln\alpha+\ln\beta)+\frac{1}{8}x^2(\ln\alpha-\ln\beta)^2+o(x^2) \\ &= \ln 2 + x\ln\sqrt{\alpha\beta} + \frac{1}{8}x^2\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

2. On peut ici aussi composer des DLs. Mais, une fois n'est pas coutume, utilisons Taylor-Young. C'est jouable parce qu'il ne faut dériver « que » 2 fois notre fonction. On a
   - $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   - Pour tout x voisin de $\frac{\pi}{4}$,
   $$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$
   et donc
   $$f'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}\frac{\sqrt{2}}{4}$$
   - Allons, courage. Pour tout x voisin de $\frac{\pi}{4}$,
   $$f''(x) = \frac{\cos^2 x - 2}{4\sin^{\frac{3}{2}} x}$$
   et donc
   $$f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{3}{8}\sqrt[4]{2}\sqrt{2}$$
   Regroupant le tout, on obtient tout arrangé
   $$f(x) = \sqrt[4]{2}^3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{3}{16}(x - \frac{\pi}{4})^2 + o(x - \frac{\pi}{4})^2\right)$$

3. Tout d'abord,
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$
Ainsi,
$$f(x) = e\exp(u)$$
où
$$u = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \to 0$$
lorsque x tend vers 0. Comme u est de l'ordre de x, on a $o(u^3) = o(x^3)$. Ainsi,
$$f(x) = e(1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(x^3))$$
Développons tout cela dans un tableau. Ci-dessous, les coefficients du DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{e}f(x)$.

x^0	1	$=$	1
x^1	$\frac{1}{2}$	$=$	$\frac{1}{2}$
x^2	$-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$	$=$	0
x^3	$\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{48}$	$=$	$\frac{1}{48}$

Ainsi,
$$f(x) = e\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)\right)$$

4. Le $n = 4$ ne doit pas nous effrayer car f est paire. On a
$$1 + \cos x = 2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$
et donc
$$f(x) = \sqrt{2+2u} = \sqrt{2}\sqrt{1+u}$$

où

$$u = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4) \to 0$$

lorsque x tend vers 0. Remarquons que u est de l'ordre de x^2, et donc $o(u^2)$ est de l'ordre de x^4. Il suffit donc de développer la racine carrée à l'ordre 2 pour avoir un DL à l'ordre 4 de $f(x)$.

$$f(x) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(x^4)\right)$$

faisons comme dans l'exercice précédent et rangeons les coefficients du DL de $\frac{1}{\sqrt{2}}f(x)$ dans un tableau.

x^0	1	$=$	1
x^2	$-\frac{1}{8}$	$=$	$-\frac{1}{8}$
x^4	$\frac{1}{96} - \frac{1}{128}$	$=$	$\frac{1}{384}$

Ainsi,

$$f(x) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{384}x^4 + o(x^4)\right)$$

Exercice 10. Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ si $x \neq 0$. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\pi, 0[$ et $]0, \pi]$. On a de plus pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Commençons par montrer que f est continue en 0. On a pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\sin\frac{x}{2} - x}{2x\sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{2\frac{x}{2} + o(x^2) - x}{2x\sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{o(x^2)}{2x\sin\frac{x}{2}} \sim \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)$ tend vers $0 = f(0)$ lorsque x tend vers 0.

Passons maintenant à la dérivabilité en utilisant un corollaire du TAF : nous allons montrer que f' a une limite finie en 0. Cela entraîne par le fameux corollaire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)$ est la limite en question. Et donc, bonus, que f' est continue en 0. On a

$$f'(x) = \frac{x^2\cos\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}}$$

Le dénominateur est équivalent à x^4. Nous allons donc faire un DL à l'ordre 4 du numérateur. La trigonométrie est notre amie pour simplifier les calculs, car

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$\begin{aligned}
x^2\cos\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2} &= x^2\cos\frac{x}{2}-2(1-\cos x)\\
&= x^2(1-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))-2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4))\\
&= -\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\sim-\frac{1}{24}x^4
\end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{24}$ lorsque x tend vers 0. On en déduit que f est dérivable en 0, que $f'(0)=-\frac{1}{24}$, et, bonus, que f' est continue en 0. Conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$.

Il s'avère que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\pi,\pi]$, mais ceci est une toute autre histoire.

Exercice 11. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=xe^x$.

1. Démontrer qu'il existe un segment I centré en 0 sur lequel $f'>0$. La fonction $f:I\to J=f(I)$ est donc bijective, et sa réciproque, que l'on notera g, est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Déterminer un DL à l'ordre 3 de la fonction g en 0.

1. $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on a, pour tout réel x,
$$f'(x)=(x+1)e^x$$
Posons $I=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. On a $f'>0$ sur I.
2. Le théorème de Taylor-Young nous dit que g, étant trois fois dérivable en 0, admet un DL à l'ordre 3 en 0. Comme $f(0)=0$, on a donc $g(0)=0$. Le DL de g est donc de la forme
$$g(t)=a_1t+a_2t^2+a_3t^3+o(t^3)$$
Remarquons que
$$f(x)=x+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$$
Comme $g\circ f=id$, on obtient en composant
$$\begin{aligned}
x &= a_1f(x)+a_2f(x)^2+a_3f(x)^3+o(f(x)^3)\\
&= a_1(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3))\\
&\quad +a_2(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3))^2\\
&\quad +a_3(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3))^3+o(x^3)
\end{aligned}$$
où le $o(x^3)$ de la dernière ligne vient de ce que $f(x)\sim_0 x$ et, donc, $o(f(x)^3)=o(x^3)$. Développons en rangeant le tout dans un tableau. Le théorème d'unicité du DL nous dit que tous les coefficients sont nuls, sauf celui de degré 1 qui vaut 1 (puisque $g\circ f(x)=x$).

x^0	0	$=$	0
x^1	a_1	$=$	1
x^2	a_1+a_2	$=$	0
x^3	$\frac{1}{2}a_1+2a_2+a_3$	$=$	0

On en déduit $a_1=1$, $a_2=-1$ et $a_3=-\frac{3}{2}$. Ainsi,
$$g(t)=t-t^2-\frac{3}{2}t^3+o(t^3)$$

Exercice 12.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable en un réel x. Déterminer la limite lorsque $h \to 0, h \neq 0$ de
$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$
2. En déduire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

---

1. f étant deux fois dérivable en x, le théorème de Taylor-Young nous permet de faire un DL à l'ordre 2 de la fonction f au point x :
$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+o(h^2)$$
De même,
$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+o(h^2)$$
On en déduit
$$\frac{1}{h^2}(f(x+h)+f(x-h)-2f(x))=f''(x)+o(1)$$
La quantité proposée tend donc vers $f''(x)$ lorsque h tend vers 0.
2. Soit f une solution du problème. Supposons que f n'est pas identiquement nulle. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \neq 0$,
$$(\star)\ \frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y^2}=2f(x)\frac{f(y)-1}{y^2}$$
Prenons $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On a pour tout $y \neq 0$,
$$\frac{f(y)-1}{y^2}=\frac{f(x_0+y)+f(x_0-y)-2f(x_0)}{2f(x_0)y^2}$$
D'après la question a, cette quantité tend, lorsque y tend vers 0, vers $\lambda = \frac{f''(x_0)}{2f(x_0)}$. Revenons maintenant à $(\star)$ et faisons tendre y vers 0. On obtient, pour tout réel x,
$$f''(x)=2\lambda f(x)$$
La fonction f est donc solution de l'équation différentielle
$$y''=\mu y$$
où $\mu = 2\lambda$. Discutons maintenant sur μ.
   - Cas 1 : $\mu = 0$. On a donc $f''=0$. La fonction f est affine : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Ce n'est pas tout. Rappelons-nous que $\frac{1}{x^2}(f(x)-1)$ a une limite finie en 0. Ici,
$$\frac{1}{x^2}(f(x)-1)=\frac{a}{x}+\frac{b-1}{x^2}$$
L'existence d'une limite finie en 0 de cette quantité oblige $a=0$ et $b=1$. Ainsi, f est constante égale à 1.

- Cas 2 : $\mu < 0$. Posons $\mu = -\omega^2$, où $\omega > 0$. On a donc $f'' + \omega^2 f = 0$ et il existe ainsi $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$. On a cette fois-ci
$$\frac{1}{x^2}(f(x)-1) = \frac{1}{x^2}(a(1-\frac{\omega^2x^2}{2}+o(x^2))+b(\omega x+o(x^2)-1) = \frac{a-1}{x^2}+\frac{b\omega}{x}-\frac{\omega^2}{2}+o(1)$$
Cette quantité ayant une limite finie en 0, cela oblige $a = 1$ et $b = 0$. Ainsi, $f(x) = \cos(\omega x)$.
- Cas 3 : $\mu > 0$. Posons $\mu = \omega^2$, où $\omega > 0$. On a donc $f'' - \omega^2 f = 0$ et il existe ainsi $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\cosh x + b\sinh x$. En procédant comme dans le cas précédent, on trouve que $a = 1$ et $b = 0$, et donc $f(x) = \cosh(\omega x)$.

On vérifie, inversement, que les fonctions ci-dessus sont bien solutions. Les solutions de notre problème sont donc

- La fonction nulle.
- La fonction constante égale à 1.
- Les fonctions $x \mapsto \cos(\omega x)$ où $\omega > 0$.
- Les fonctions $x \mapsto \cosh(\omega x)$ où $\omega > 0$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x-y)f(x+y) \leq f(x)^2$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x)f''(x) \leq f'(x)^2$$
2. Dans le cas où f ne s'annule pas, que peut-on dire de $\ln|f|$?

1. Procédons comme dans l'exercice précédent, en écrivant que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x+y) = f(x) + yf'(x) + \frac{1}{2}y^2f''(x) + o(y^2)$$
De même,
$$f(x-y) = f(x) - yf'(x) + \frac{1}{2}y^2f''(x) + o(y^2)$$
Faisons cette fois ci le produit de ces deux DLs. Il vient
$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 + (f(x)f''(x) - f'(x)^2)y^2 + o(y^2)$$
Ainsi,
$$(f(x)f''(x) - f'(x)^2)y^2 + o(y^2) \leq 0$$
Divisons par y^2 pour, évidemment, $y \neq 0$. Il vient
$$f(x)f''(x) - f'(x)^2 + o(1) \leq 0$$
Puis faisons tendre y vers 0. On obtient
$$f(x)f''(x) - f'(x)^2 \leq 0$$
qui est l'inégalité souhaitée.

2. Supposons que f ne s'annule pas. f étant continue sur $\mathbb{R}$, par le TVI, f a un signe constant sur $\mathbb{R}$. Tout comme f, la fonction $\ln|f|$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x,
$$(\ln|f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
puis
$$(\ln|f|)''(x) = \frac{f(x)f''(x) - f'(x)^2}{f(x)^2}$$
Ainsi, $(\ln|f|)'' \leq 0$. Nous ne creuserons pas davantage cette intéressante propriété, attendez pour cela l'année prochaine. Elle nous raconte que la fonction $\ln|f|$ est une fonction *concave.*

Exercice 14.

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, il existe un unique réel $\theta \in]0, 1[$ (qui dépend de x) tel que
$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + \theta x}$$
2. Prouver que θ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

1. Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \ln(1 + t)$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe un réel $0 < c < x$ tel que
$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$$
ou encore
$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + c}$$
Posons $\theta = \frac{c}{x}$. On a $0 < \theta < 1$ et
$$(\star)\ \ln(1 + x) = \frac{x}{1 + \theta x}$$
Passons à l'unicité. Supposons qu'il existe deux tels réels θ et θ'. On a alors
$$\frac{x}{1 + \theta x} = \frac{x}{1 + \theta' x}$$
d'où, aisément, $\theta = \theta'$.
2. Faisons un DL de $(\star)$.
$$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x(1 - \theta x + o(\theta x))$$
Comme $0 < \theta < 1$, on a $o(\theta x) = o(x)$. Ainsi,
$$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x - \theta x^2 + o(x^2)$$
On soustrait x, on divise par x^2 en prenant évidemment $x \neq 0$, et on obtient
$$-\frac{1}{2} + o(1) = -\theta + o(1)$$
Il ne reste plus qu'à faire tendre x vers 0 pour obtenir que $\theta \to \frac{1}{2}$.

Exercice 15. Étudier les fonctions f données ci-dessous.

1. $f(x) = x^{x-x^2}$.
2. $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.
3. $f(x) = \exp \frac{x^2}{x^2-1}$.
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x-2}$. Étudier la concavité.