

Exercice 1. Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^{x-x^2}$.

$f(x)$ étant défini par un exposant variable, on a précisément $f(x) = e^{(x-x^2)\ln x}$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle et on a pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = x^{x-x^2} ((1-2x)\ln x + 1-x)$$

Le signe de la dérivée est non évident. Dans ce cas, fréquent lors de l'étude d'une fonction non triviale, on est amené à étudier une fonction auxiliaire. Écrivons, pour tout $x \neq \frac{1}{2}$,

$$f'(x) = x^{x-x^2} (1-2x)\varphi(x)$$

où

$$\varphi(x) = \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

En isolant le logarithme on s'assure que la dérivée de φ est « simple ». Pour tout $x > 0$ différent de $\frac{1}{2}$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-(1-2x) + 2(1-x)}{(1-2x)^2} = \frac{4x^2 - 3x + 1}{(1-2x)^3} > 0$$

car le discriminant du numérateur est $-7 < 0$. On en déduit que φ croît strictement sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Par le TVI et la monotonie stricte, on voit que φ s'annule en un unique réel α sur $]0, \frac{1}{2}[$ et un unique réel β sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Mystère pour la valeur de α . En revanche, β est a posteriori évident. En effet, $\varphi(1) = 0$, donc $\beta = 1$. On en déduit le tableau de variations de f (voir plus loin pour les valeurs des limites).

x	0	α	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	1	$f(\alpha)$	1	0		

Il reste à étudier f en 0 et $+\infty$.

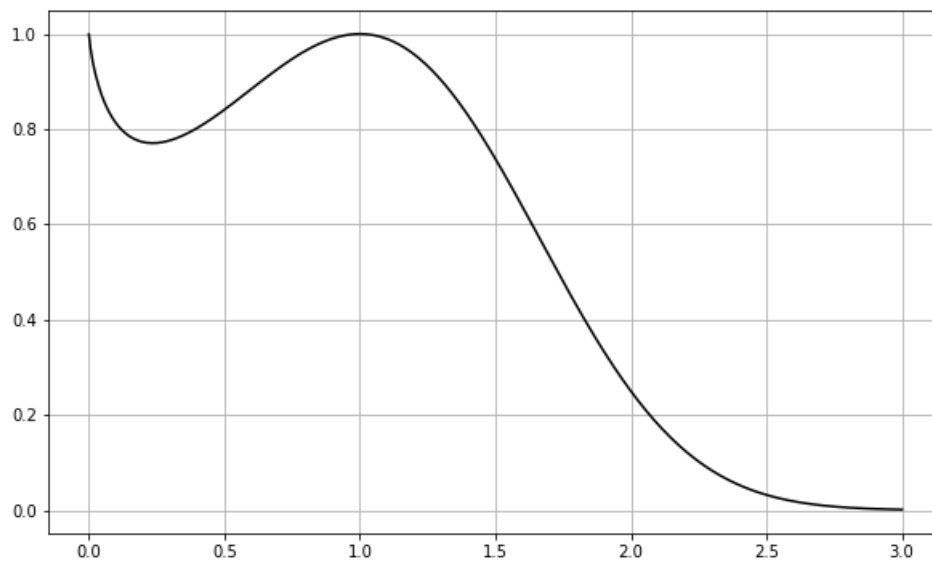
- En 0, $(x-x^2)\ln x \sim x\ln x \rightarrow 0$. Ainsi, $f(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$. Prolongeons f par continuité en posant $f(0) = 1$. Le prolongement est-il dérivable? On forme pour cela des taux d'accroissement. Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} \sim_0 (1-x)\ln x \rightarrow -\infty$$

lorsque x tend vers 0. La courbe de f admet donc une tangente verticale au point $(0, 1)$.

- En $+\infty$, $(x-x^2)\ln x \sim -x^2\ln x \rightarrow -\infty$. Ainsi, $f(x) \rightarrow 0$. La courbe de f a donc une asymptote horizontale, la droite d'équation $Y = 0$. De plus, comme f décroît au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de l'asymptote.

Il ne reste qu'à tracer la courbe.



Exercice 2. Étudier la fonction f définie par $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$. On a pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(x-2)(x+1)e^{\frac{1}{x}}$$

Les variations de f sont donc évidentes. Les limites aux points remarquables ne posent quant à elles pas de problème.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$	$+\infty$	$\searrow 4\sqrt{e}$	$\nearrow +\infty$

Il reste à étudier f en $\pm\infty$ et à gauche de 0.

- Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0. On a donc, en faisant un développement limité à l'ordre 2 de $e^{1/x}$,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x+2)e^{\frac{1}{x}} \\
 &= (x+2)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
 &= x + 3 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $Y = X + 3$. De plus, au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(x) - (x+3) \sim \frac{5}{2x}$$

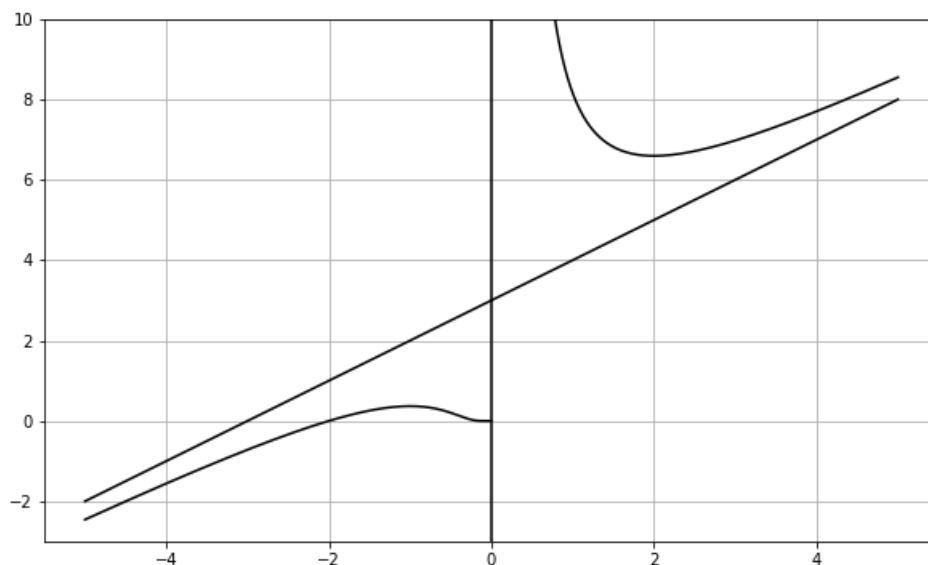
ce qui donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Au voisinage de $-\infty$, la courbe est sous l'asymptote. Au voisinage de $+\infty$ elle est au-dessus de l'asymptote.

- Lorsque x tend vers 0, $x < 0$, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$. Posons $t = -\frac{1}{x}$, de sorte que $t \rightarrow +\infty$. On a

$$\frac{f(x) - 0}{x - 0} = -t \left(-\frac{1}{t} + 2 \right) e^{-t} = (1 - 2t)e^{-t}$$

et cette quantité tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. La courbe a donc une demi-tangente horizontale à gauche au point $(0, 0)$.

Traçons la courbe.



Exercice 3. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \exp \frac{x^2}{x^2-1}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $]1, +\infty[$. On a pour tout $x \neq \pm 1$,

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} f(x)$$

qui est donc du signe opposé de celui de x . On en déduit les variations de f (les limites sont évidentes). La fonction f étant paire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. Mais je trace quand même ici son tableau de variations sur $\mathbb{R}$. Pourquoi? Regardez ce tableau : il a l'air « symétrique ». Normal, vu que f est paire. Si vous voyez un tel tableau dites vous toujours : « N'ai-je pas raté quelque chose ? »

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	0	-
$f(x)$	e	$+\infty$	1	0	e

Il reste à étudier f en 0 et $+\infty$.

- On a $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 1, x > 1$. La courbe de f a donc une asymptote verticale, la droite d'équation $X = 1$.
- On a $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 1, x < 1$. La fonction f peut donc être prolongée par continuité à gauche de 1 en posant $f(1) = 0$. Le prolongement est-il dérivable ? Pour tout $x < 1$ proche de 1, posons $x = 1 - h$ de sorte que $h \rightarrow 0, h > 0$. Il vient

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{h} \exp \frac{-(1-h)^2}{h(2-h)}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{-(1-h)^2}{h(2-h)} &= -\frac{1}{2h} \frac{1-2h+o(h)}{1-\frac{h}{2}} \\ &= -\frac{1}{2h} (1-2h+o(h)) \left(1 + \frac{h}{2} + o(h)\right) \\ &= -\frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3}{2}h + o(h)\right) \\ &= -\frac{1}{2h} + \frac{3}{4} + o(1) \end{aligned}$$

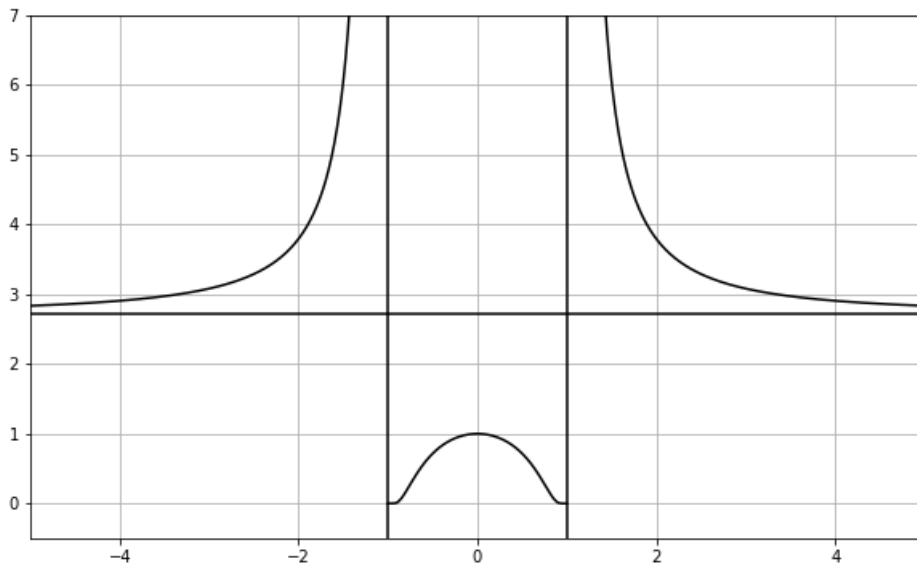
Posons $h = \frac{1}{t}$ de sorte que $t \rightarrow +\infty$ lorsque $h \rightarrow 0, h > 0$. Il vient

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -te^{-\frac{t}{2}} e^{\frac{3}{4} + o(1)}$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Ainsi, le prolongement de f en 1 est dérivable, de dérivée nulle. La courbe a une demi-tangente horizontale en 1, à gauche.

- En $+\infty$, $f(x) \rightarrow e$. La courbe de f a donc une asymptote horizontale, la droite d'équation $Y = e$. De plus, comme f décroît au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de l'asymptote.

Voici la courbe.



Exercice 4. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x - 2}$. Étudier aussi la concavité.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où $x^3 + x - 2$ ne s'annule

pas. Comme

$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

On a pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{3(x^3 + x - 2)^{\frac{2}{3}}} > 0$$

Ainsi, f croît strictement sur $\mathbb{R}$. Il reste à étudier f en $\pm\infty$ et en 1.

- On a pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = x(1 + u)^{\frac{1}{3}}$$

où $u = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Faisons un développement asymptotique :

$$f(x) = x(1 + \frac{1}{3}u + o(u)) = x(1 + \frac{1}{3}u + o(\frac{1}{x^2}))$$

En effet, comme u est de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$, $o(u) = o(\frac{1}{x^2})$. En remplaçant u par sa valeur on obtient

$$f(x) = x(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = x + \frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x})$$

On en déduit que la droite d'équation $Y = X$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$. De plus, le terme $\frac{1}{3x}$ nous dit que la courbe est au-dessus de son asymptote pour x voisin de $+\infty$, et au-dessous pour x voisin de $-\infty$.

- Pour l'étude en 1, considérons des taux d'accroissement pour examiner la dérivabilité éventuelle de f en 1. On a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x^2 + x + 2)^{\frac{1}{3}}}{(x - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

et cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1. La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Cela dit, la courbe de f a une tangente verticale au point $(1, 0)$.

Étudions maintenant la concavité de f . Après un calcul courageux, on obtient pour tout $x \neq 1$,

$$f''(x) = \frac{2}{9} \frac{3x^2 - 18x - 1}{((x - 1)(x^2 + x + 2))^{\frac{5}{3}}}$$

Le numérateur change de signe pour

$$x = \frac{9 \pm 2\sqrt{21}}{3}$$

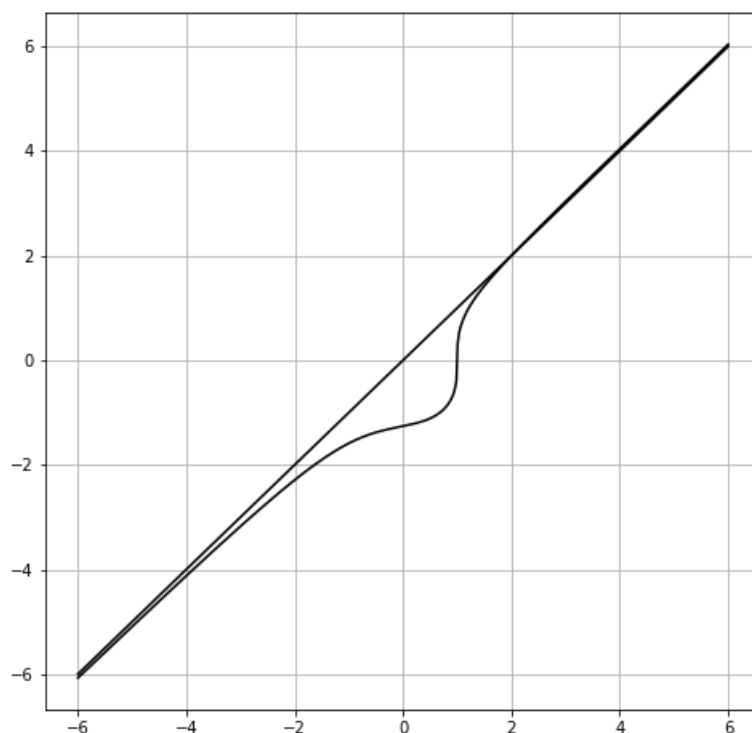
Des valeurs approchées de ces deux réels sont $\alpha \simeq -0.06$ et $\beta \simeq 6.06$. On en déduit le signe de f'' .

x	$-\infty$	α	1	β	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	+

En conclusion :

- Sur $] -\infty, \alpha]$, f est concave (la courbe « tourne » vers la droite).
- Sur $[\alpha, 1]$, f est convexe (la courbe « tourne » vers la gauche).
- Sur $[1, \beta]$, f est concave.
- Sur $[\beta, +\infty[$, f est convexe.

Voici la courbe, hélas tracée automatiquement. La concavité apparaît très mal parce que la courbe est trop près de son asymptote.



Exercice 5. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} \arctan x$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle ne contenant pas ± 1 . Comme f est impaire, on l'étudie sur $\mathbb{R}_+$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = \sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)} \arctan x$$

où $\varepsilon = -1$ si $0 \leq x \leq 1$ et $\varepsilon = 1$ si $x > 1$. Ainsi, pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \varepsilon \frac{x \arctan x}{\sqrt{|x^2 - 1|}} + \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x^2 + 1}$$

Sur $]1, +\infty[$, on a $\varepsilon = 1$ et, clairement, $f' > 0$. Sur $[0, 1[$, en revanche la situation est moins claire. Écrivons, pour $x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = -\frac{x \arctan x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2 + 1} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \varphi(x)$$

où

$$\varphi(x) = \frac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)} - \arctan x$$

L'idée est d'isoler l'arc tangente afin qu'il disparaisse par dérivation. En effet,

$$\varphi'(x) = -\frac{5x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)^2}$$

On en déduit que φ décroît strictement sur $]0, 1[$. Or, φ tend vers $+\infty$ en 0 (à droite, je rappelle qu'on est sur $\mathbb{R}_+$) et $\varphi(1) = -\frac{\pi}{4} < 0$. Par la monotonie stricte et le TVI, φ s'annule en un unique réel $0 < \alpha < 1$. On en déduit le signe de f' , puis les variations de f . La limite de f en $+\infty$ est évidente.

x	0	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0	$+\infty$

Reste à étudier f en 1 et $+\infty$.

- Commençons par examiner la dérivabilité de f en 1. On pour tout $x \neq 1$ voisin de 1,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\sqrt{|x-1|(x+1)} \arctan x}{x-1} \\ &\sim_1 \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{|x-1|}}{x-1} \end{aligned}$$

Cette quantité tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 1, $x < 1$, et vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1, $x > 1$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Cependant, la courbe de f admet une tangente verticale au point $(1, 0)$.

- Passons à l'étude en $+\infty$. Un rapide coup d'oeil montre que

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2} x$$

Nous avons donc l'espoir d'une asymptote. Faisons un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$. On a, pour tout x assez grand,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - 1} \arctan x \\ &= x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Posons $t = \frac{1}{x}$, de sorte que $t > 0$ et $t \rightarrow 0$ lorsque x tend vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right) &= (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right) \\ &= (1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2))(\frac{\pi}{2} - t + o(t^2)) \\ &= \frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{4}t^2 + o(t^2) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

De là, en multipliant par x ,

$$f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 - \frac{\pi}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, la courbe de f admet la droite d'équation $Y = \frac{\pi}{2}X - 1$ pour asymptote en $+\infty$. De plus,

$$f(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) \sim_{+\infty} -\frac{\pi}{4x} < 0$$

et donc la courbe est au-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Voici la courbe.

