Exercice 1. Comparer les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

1. $x \ln x$ et $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0.
2. $x \ln x$ et $\sqrt{x^2+3x}\ln(x^2)$ au voisinage de $+\infty$.
3. $\frac{1}{x+1}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de -1.

Exercice 2. Vrai ou faux ? Si f et g sont équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et g est croissante au voisinage de a, alors f est croissante au voisinage de a.

Exercice 3. On se donne deux fonctions f et g strictement positives équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Vrai ou faux ?

1. Si f (et donc g) tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ au point a, alors $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.
2. Si f (et donc g) tend vers $+\infty$ au point a, alors $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.
3. Si f (et donc g) tend vers 0 au point a, alors $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.
4. Si f (et donc g) tend vers 1 au point a, alors $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.

Exercice 4. On se donne deux fonctions f et g équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Vrai ou faux ?

1. Si f (et donc g) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ au point a, alors $e^f \sim e^g$ au voisinage de a.
2. Si f (et donc g) tend vers $+\infty$ au point a, alors $e^f \sim e^g$ au voisinage de a.
3. Si f (et donc g) tend vers $-\infty$ au point a, alors $e^f \sim e^g$ au voisinage de a.

Exercice 5. Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $a=0$, $f(x) = x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$.
2. $a=0$, $f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$.
3. $a=0$, $f(x) = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.
4. $a=0$, $f(x) = \left(1+3\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$.
5. $a=\frac{\pi}{4}$, $f(x) = \tan(2x)\ln(\tan x)$.
6. $a=+\infty$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}\tan\frac{1}{x}$.

Exercice 6. Calculer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $a=0$, $f(x) = \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$
2. $a=0$, $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$
3. $a=0$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$
4. $a=e$, $f(x) = \frac{e^x - x^e}{(x-e)^2}$

Exercice 7.

1. Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On suppose que $f(x) \sim_0 cx^n$ où $c \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de
$$\log_2 \frac{f(2x)}{f(x)}$$
2. On prend $f(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x)$. Au moyen d'une calculatrice, déterminer à quel ordre il faudrait faire un DL de f en 0 pour obtenir un équivalent de f en 0.

Exercice 8. Donner un équivalent en 0 de $(2+\cos x)(2+\cosh x)-9$

Exercice 9. Déterminer un DL en a à l'ordre n pour la fonction f :

1. $a=0$, $n=2$, $f(x)=\ln(\alpha^x+\beta^x)$ (α,β réels strictement positifs)
2. $a=\pi/4$, $n=2$, $f(x)=\sqrt{\sin x}$
3. $a=0$, $n=3$, $f(x)=e^{\sqrt{1+x}}$
4. $a=0$, $n=4$, $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$

Exercice 10. Soit $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ si $x\neq 0$. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 11. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=xe^x$.

1. Démontrer qu'il existe un segment I centré en 0 sur lequel $f'>0$. La fonction $f:I\to J=f(I)$ est donc bijective, et sa réciproque, que l'on notera g, est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Déterminer un DL à l'ordre 3 de la fonction g en 0.

Exercice 12.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable en un réel x. Déterminer la limite lorsque $h\to 0, h\neq 0$ de
$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$
2. En déduire les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant pour tous $x,y\in\mathbb{R}$
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

Exercice 13. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifiant pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,
$$f(x-y)f(x+y)\leq f(x)^2$$

1. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f(x)f''(x)\leq f'(x)^2$$
2. Dans le cas où f ne s'annule pas, que peut-on dire de $\ln|f|$?

Exercice 14.

1. Montrer que, pour tout réel $x>0$, il existe un unique réel $\theta\in]0,1[$ (qui dépend de x) tel que
$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta x}$$
2. Prouver que θ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 15. Étudier les fonctions f données ci-dessous.

1. $f(x)=x^{x-x^2}$.
2. $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.
3. $f(x)=\exp\frac{x^2}{x^2-1}$.
4. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x-2}$. Étudier la concavité.