Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\ker f$, $\ker(f - id)$ et $\ker(f + id)$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit j une racine cubique non réelle de 1. Soit $E = \{a + bj, a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. En donner une base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que l'application $f : x \longmapsto jx$ est un automorphisme de E.
3. Déterminer la matrice J de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer $J^2 + J + I$. Remarque(s) ?

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $A^2 - (\text{Tr } A)A + (\det A)I$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & 1/\alpha^2 \\ \alpha & 1 & 1/\alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Soit $E = Vect(e_1, e_2, e_3)$ où les fonctions $e_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$e_1(x) = e^{\alpha x} \cos x, \ e_2(x) = e^{\alpha x} \sin x, \ e_3(x) = e^{\alpha x}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(f) = f'$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E, et calculer $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}\varphi$.
2. Inverser la matrice A. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application

$$x \longmapsto e^{\alpha x}(a \cos x + b \sin x + c)$$

Exercice 6. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout entier i entre 1 et n,

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

On interprète A comme la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $x \in \ker f$. Montrer que $x = 0$. En déduire que f est injective, puis que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Que dire de A ?
3. Même question lorsqu'on remplace les hypothèses sur A par : « pour tout entier j entre 1 et n, $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ ».

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de f, $\ker f$ et $\text{Im}\, f$.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1, 0, 1)$, $e'_2 = (-1, 1, 0)$, $e'_3 = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose $A^2 = A$, $A \neq 0$ et $A \neq I_2$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

2. En déduire qu'il existe 4 réels a, b, c, d tels que $ad + bc \neq 0$ et

$$A = \frac{1}{ad + bc} \begin{pmatrix} ad & ac \\ bd & bc \end{pmatrix}$$

3. Réciproque ?

Exercice 11. En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = I$ et $A \neq \pm I$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. Prouver que rg $A = 1$.

Exercice 13. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$(E)\ X = (\text{Tr } X)A + B$$

Exercice 14. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont les réels

$$a_{ij} = \sin(\alpha_i + \alpha_j)$$

Montrer que rg $A \leq 2$.

Exercice 15. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B sont-elles équivalentes ? Semblables ?

Exercice 16. Soit $n \geq 1$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que φ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 17. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X) - P(1 - X)$. Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.