Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. montrer :

1. $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
2. $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
3. $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$.

1. Calculer $f^2 - (a+d)f + (ad - bc)id$.
2. En déduire que $f \in GL(E)$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si

$$(\star)\ \forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2id = 0$.

1. Montrer que $f \in GL(E)$.
2. Montrer que $F = \ker(f - id)$ et $G = \ker(f - 2id)$ sont des sev supplémentaires de E.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

1. $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \iff \ker f^2 = \ker f$
2. $\ker f + \operatorname{Im} f = E \iff \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$

Exercice 6. Soient Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Comparer $F \cap (G + H)$ et $F \cap G + F \cap H$
2. Comparer $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Démontrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Démontrer que dans ce cas, $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 8. Soit p un projecteur dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $f = id_E - \alpha p$. Trouver une CNS sur α pour que $f \in \mathrm{GL}(E)$. Calculer alors f^{-1}.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :

1. $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
2. f et g sont des projecteurs et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

Soit $\mathcal{F} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 11. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$f_\alpha(x) = |x - \alpha|$$

Soit $\mathcal{F} = (f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 12. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, soit e_a la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\mathcal{F} = (e_a)_{a\in\mathbb{C}}$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $n \geq 1$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n scalaires. Soit enfin

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les α_k la famille $\mathcal{F} = (y - e_1, y - e_2, \dots, y - e_n)$ est-elle liée ?