

Exercice 1. Parmi les ensembles suivants, lesquels (pour des lois « évidentes ») sont des espaces vectoriels ?

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y^2 - z = 0\}$
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + y - z = 1\}$
4. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(0) - 4f(1) = 0\}$
5. $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \lim_{+\infty} f = f(2)\}$
6. $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \lim_{+\infty} f = f(0)f(1)\}$
7. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$
8. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x)e^{-x} = f(2x)\}$

Exercice 2. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (3x - 2y + z, x + y + z, 2x - 3y)$
2. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto xt - yz$
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xt - yz$ (où z et t sont deux réels fixés)
4. $f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, g \mapsto (x \mapsto (x^2 - 1)g(x) + g(0))$
5. $f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, g \mapsto (x \mapsto g(x + 1) - g(x))$
6. $f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, g \mapsto g \circ g$

Exercice 3. Déterminer noyau et image des applications linéaires ci-dessous :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x - 3y, 4x - 6y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 3y + 2z, x + y + z)$
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + 2y, 4x + 5y, 7x + 8y)$
4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y + z, z + x, x + y)$