Exercice 1. Déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de

1. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)(k+2)}$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{(k+1)^2(k+2)}$$

On admettra que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3+2}{(X-1)(X+1)}, \quad \frac{1}{X(X+1)...(X+n)}, \quad \frac{X-1}{X(X+1)^2},$$

$$\frac{1}{X^4+X^2+1}, \quad \frac{1}{X^2(X^2+1)^2}, \quad \frac{X^5}{X^4-1}$$

Exercice 3. Calculer les primitives des fractions de l'exercice précédent.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre le système de n équations à n inconnues

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{i+j} = 1 \quad i = 1 \cdots n$$

On utilisera la D.E.S. de la fraction

$$F = -\frac{\prod_{k=1}^{n}(X-k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+k)}$$

Exercice 5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de racines $a_1, \ldots, a_m$ de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Décomposer la fraction $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si les racines de P sont réelles et simples, alors le polynôme $Q = P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles. On pourra considérer la fraction $-\left(\frac{P'}{P}\right)'$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(\cos x) = \cos(nx)$$

2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposer la fraction $\frac{1}{P}$ en éléments simples.

Exercice 8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^4+1}$$

1. Calculer $f(x)$ pour tout réel x.

2. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice 9. Calculer la dérivée $n$ième de la fonction argth.

Exercice 10. Calculer la dérivée $n$ième de la fonction $x \longmapsto \ln(x^2+1)$.

Exercice 11. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d, e pour que les primitives de la fonction

$$x \longmapsto \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x^3(x-1)^2}$$

soient des fractions rationnelles.

Exercice 12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ possédant n racines distinctes non nulles $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. Décomposer la fraction $\frac{1}{XP(X)}$ en éléments simples.
2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Exercice 13. Soit $n \geq 2$. Réduire sous la forme $\frac{P}{Q}$ la fraction

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}$$

où les ω_k sont les racines $n$ièmes de l'unité.

Exercice 14. Le théorème de Gauss-Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P = n \in \mathbb{N}^*$. On écrit

$$P = c(X-a_1)\ldots(X-a_n)$$

où les $a_i \in \mathbb{C}$ sont les racines (éventuellement égales) de P et $c \in \mathbb{C}^*$ est son coefficient dominant.

1. Exprimer la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$ en fonction de P et de P'.
2. Soit z une racine de P' qui n'est pas racine de P. On pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mu_k = \frac{1}{|z-a_k|^2}$$

   Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k(z-a_k) = 0$$

3. En déduire qu'il existe n réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = z$.
4. Où se trouvent, géométriquement, les racines de P' ?