Exercice 1. Soit $n \geq 1$. Soit

$$P = (X-2)^n + (X-3)^n + 1$$

Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X-2$? Par $(X-2)(X-3)$? Par $(X-2)^2(X-3)$?

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \overline{z}$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $P - X$ divise $P^k - X^k$.
2. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
3. En déduire que que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(2) = 6$, $P'(2) = 1$, $P''(2) = 4$ et $\forall n \geq 3, P^{(n)}(2) = 0$.

Exercice 5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que P' est scindé.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit

$$P = aX^{n+1} + bX^n + 1$$

Déterminer une CNS sur a et b pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 7. Résoudre : $P \in \mathbb{R}[X], P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice 8. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7 tels que $(X-1)^4 | (P+1)$ et $(X+1)^4 | (P-1)$. On pourra s'intéresser tout d'abord à P'.

Exercice 9. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynôme associée est périodique (on autorise une période complexe).

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Factoriser $P_n = (X+i)^n - (X-i)^n$ sur $\mathbb{C}$.
2. En déduire la valeur de
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Exercice 11.

1. Soit $P = (X+1)^5 - X^5$. Trouver $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P = R \circ (X(X+1))$.
2. En déduire, pour tout $\in \mathbb{N}$, la valeur de
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2(k+1)^2$$

Exercice 12. Quel est le pgcd de $2X^4 + 11X^3 + 10X^2 - 5X - 3$ et $2X^3 + 5X^2 + 5X + 3$?

Exercice 13. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaires, de degré 3, divisibles par $X - 1$, et dont les restes des divisions euclidiennes par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$ sont égaux.

Exercice 14. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

1. Factoriser A sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, A divise

$$P = X^n \sin\theta - X \sin n\theta + \sin(n-1)\theta$$

Exercice 15. Factoriser le polynôme $P = X^6 + 1$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + pX^2 + qX + 2$.

Exercice 17. Soit $P = X^5 + X + 1$.

1. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que j est racine de P.
3. Factoriser P sur $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 18. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.