Quelques équadifs linéaires d'ordre 1

Pour toutes les équations différentielles $(\mathcal{E})$ ci-dessous, on appelle

- $(\mathcal{H})$ l'équation homogène associée.
- φ_0 une solution particulière de $(\mathcal{H})$ qui ne s'annule pas sur l'intervalle où on résout.
- f_0 une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont alors les fonctions $f_0 + k\varphi_0$, où $k \in \mathbb{R}$.

N.B : Sans précisions supplémentaires, x désigne un réel appartenant à l'intervalle I sur lequel on résout l'équation différentielle.

$$(\mathcal{E})\ y' + y = x^2 - 2x + 3$$

On résout sur $I = \mathbb{R}$.

• Solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : $k\varphi_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\varphi_0(x) = e^{-2x}$$

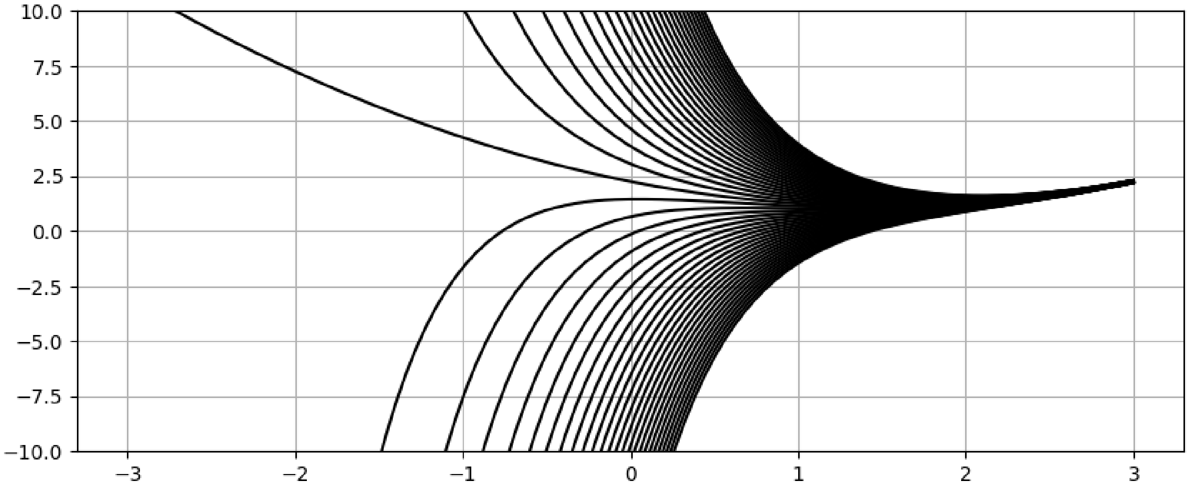
• Fonction f_0 solution particulière de $(\mathcal{E})$ sur I : méthode de variation de la constante. Ou alors, on peut tenter $f_0(x) = ax^2 + bx + c$. On a

$$\begin{array}{rcl} f_0'(x) + 2f_0(x) & = & (2ax + b) + (2ax^2 + 2bx + 2c) \\ & = & 2ax^2 + 2(a+b)x + (b + 2c) \end{array}$$

a, b, c conviennent dès que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2a & = & 1 \\ 2(a+b) & = & -2 \\ b + 2c & = & 3 \end{array} \right.$$

d'où $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ et $c = \frac{9}{4}$.



$$(\mathcal{E})\ xy'\ln x - y = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$$

On résout sur $I =]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.

• Solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : $k\varphi_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \exp \int^x \frac{dt}{t\ln t} \\ &= \exp \ln |\ln x| \\ &= |\ln x| \end{aligned}$$

Quitte à remplacer k par $-k$, on peut prendre $\varphi_0(x) = \ln x$.

• Fonction f_0 solution particulière de $(\mathcal{E})$: méthode de variation de la constante. On pose $f_0(x) = g(x)\varphi_0(x)$.

$$xf_0'(x)\ln x - f_0(x) = xg'(x)\varphi_0(x)\ln x$$

et donc

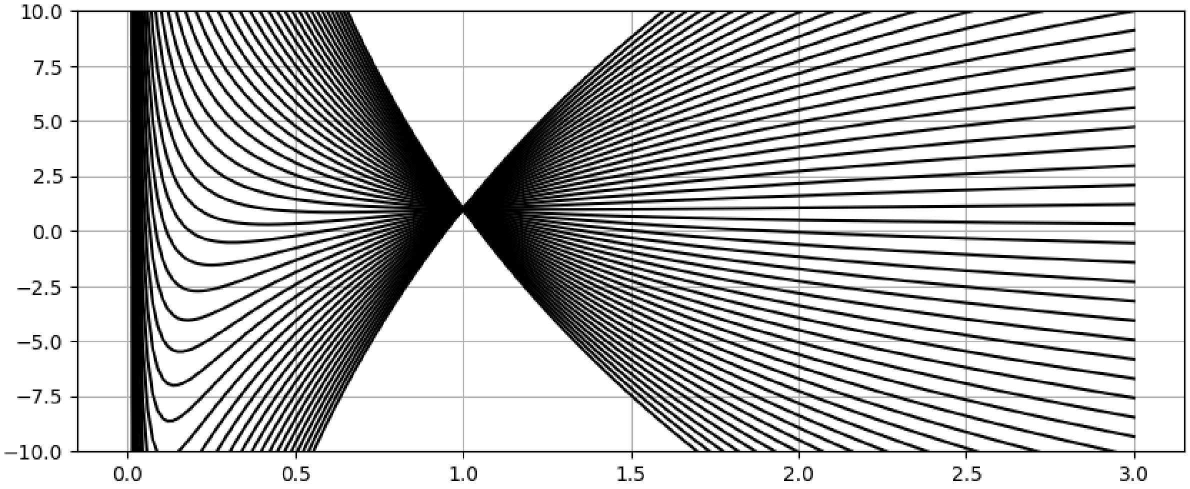
$$g'(x) = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)\frac{1}{x\varphi_0(x)} = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$$

d'où, par exemple,

$$g(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

et donc

$$f_0(x) = \frac{1}{x}$$



$$(\mathcal{E})\ (1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$$

On résout sur $I =]-1, +\infty[$.

• Solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : $k\varphi_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \exp\left(-\int^x \frac{dt}{1+t}\right)\\ &= \exp(-\ln|1+x|)\\ &= \frac{1}{|1+x|}\end{aligned}$$

Quitte à remplacer k par $-k$, on peut prendre $\varphi_0(x) = \frac{1}{1+x}$.

• Fonction f_0 solution particulière de $(\mathcal{E})$: méthode de variation de la constante. On pose $f_0(x) = g(x)\varphi_0(x)$.

$$(1+x)f_0'(x) + f_0(x) = (1+x)g'(x)\varphi_0(x)$$

et donc

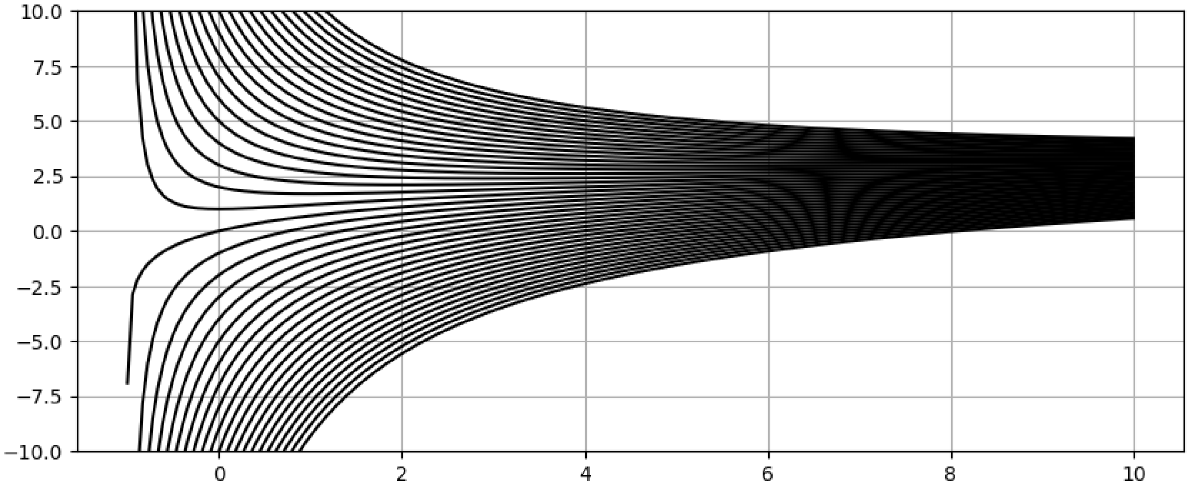
$$g'(x) = \frac{1+\ln(1+x)}{(1+x)\varphi_0(x)} = 1 + \ln(1+x)$$

d'où, par exemple,

$$g(x) = (1+x)\ln(1+x)$$

et donc

$$f_0(x) = \ln(1+x)$$



$$(\mathcal{E})\ y' + y = \frac{1}{1+e^x}$$

On résout sur $I = \mathbb{R}$.

• Solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : $k\varphi_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\varphi_0(x) = e^{-x}$$

• Fonction f_0 solution particulière de $(\mathcal{E})$: méthode de variation de la constante. On pose $f_0(x) = g(x)\varphi_0(x)$.

$$f_0'(x) + f_0(x) = g'(x)\varphi_0(x)$$

et donc

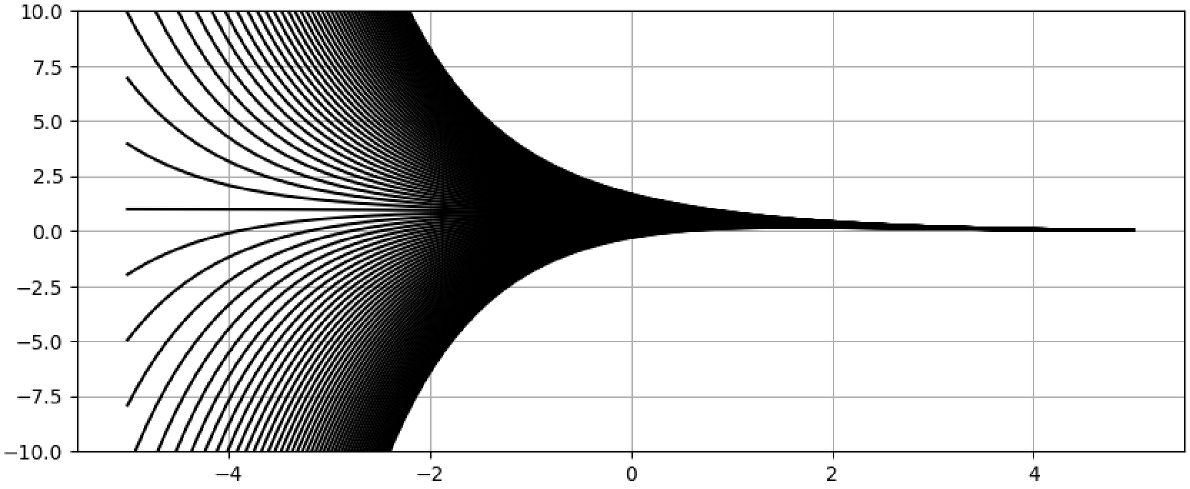
$$g'(x) = \frac{1}{1+e^x}\varphi_0(x) = \frac{x}{1+e^x}$$

d'où, par exemple,

$$g(x) = \ln(1+e^x)$$

et donc

$$f_0(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$$



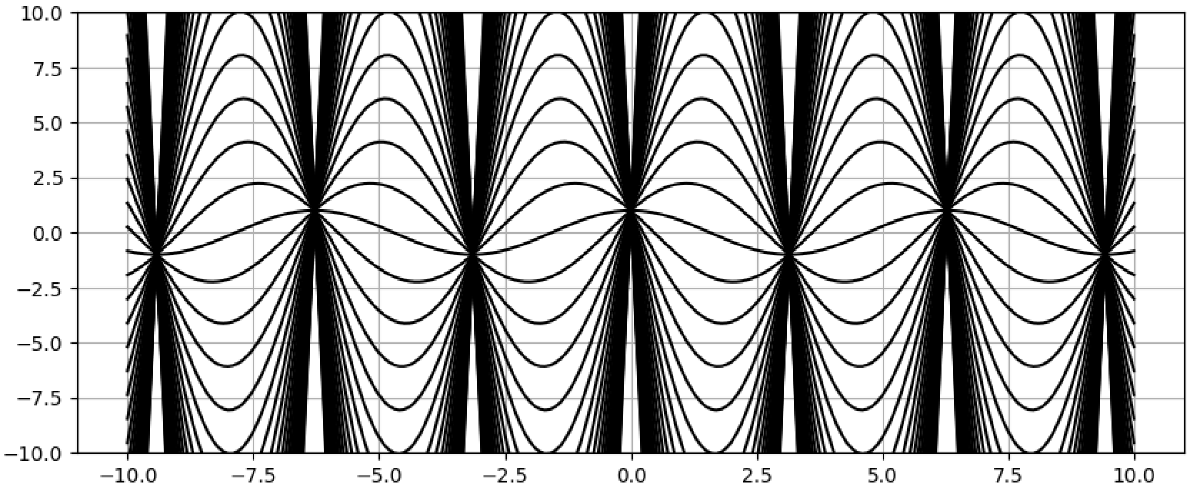
$$(\mathcal{E})\ y'\sin x - y\cos x + 1 =$$

On résout sur $I =]m\pi, (m+1)\pi[$, où $m \in \mathbb{Z}$.

• Solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : $k\varphi_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\varphi_0(x) = \cos x$$

• Fonction f_0 solution particulière de $(\mathcal{E})$: $f_0(x) = \sin x$.



$$(\mathcal{E})\ 2xy' + y = x^n$$

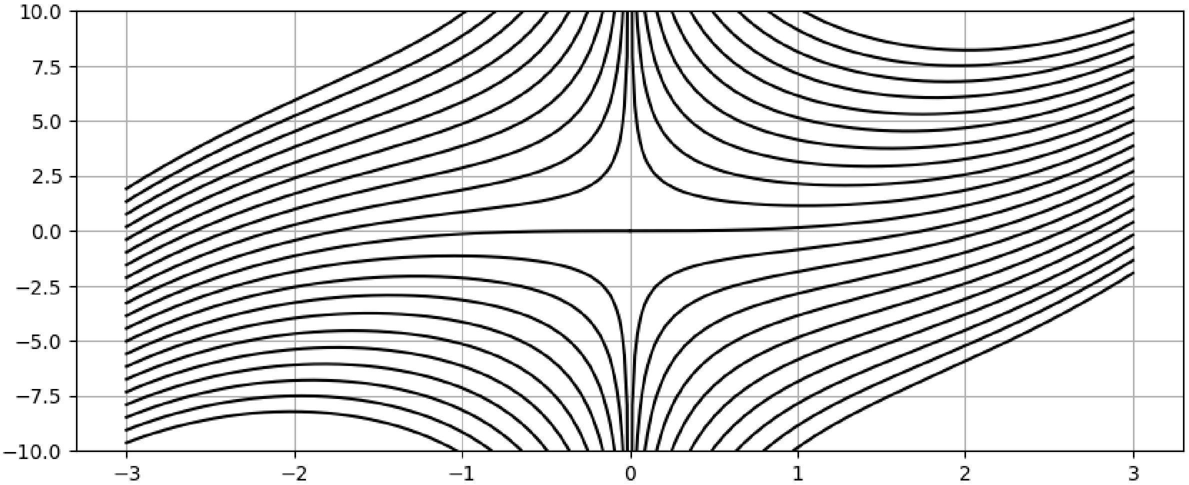
où $n \in \mathbb{N}$. On résout sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

• Solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : $k\varphi_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \exp\left(-\int^x \frac{dt}{2t}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\ln|x|\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|x|}}
\end{aligned}$$

• Fonction f_0 solution particulière de $(\mathcal{E})$: méthode de variation de la constante. Ou alors, on peut remarquer que $x \longmapsto x^n$ est « presque » solution. Une solution particulière est

$$f_0(x) = \frac{x^n}{2n+1}$$



$$(\mathcal{E})\ \ (x-1)y' + (x-2)y = x(x-1)^2$$

On résout sur $I =]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

• Solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : $k\varphi_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \exp\left(-\int^x \frac{t-2}{t-1}\,dt\right) \\
&= \exp\left(-\int^x \left(1 - \frac{1}{t-1}\right)\,dt\right) \\
&= \exp\left(-x + \ln|x-1|\right) \\
&= |x-1|e^{-x}
\end{aligned}$$

Quitte à remplacer k par $-k$, on peut prendre $\varphi_0(x) = (x-1)e^{-x}$.

• Fonction f_0 solution particulière de $(\mathcal{E})$: méthode de variation de la constante. On pose $f_0(x) = g(x)\varphi_0(x)$.

$$(x-1)f_0'(x) + (x-2)f_0(x) = (x-1)g'(x)\varphi_0(x)$$

et donc

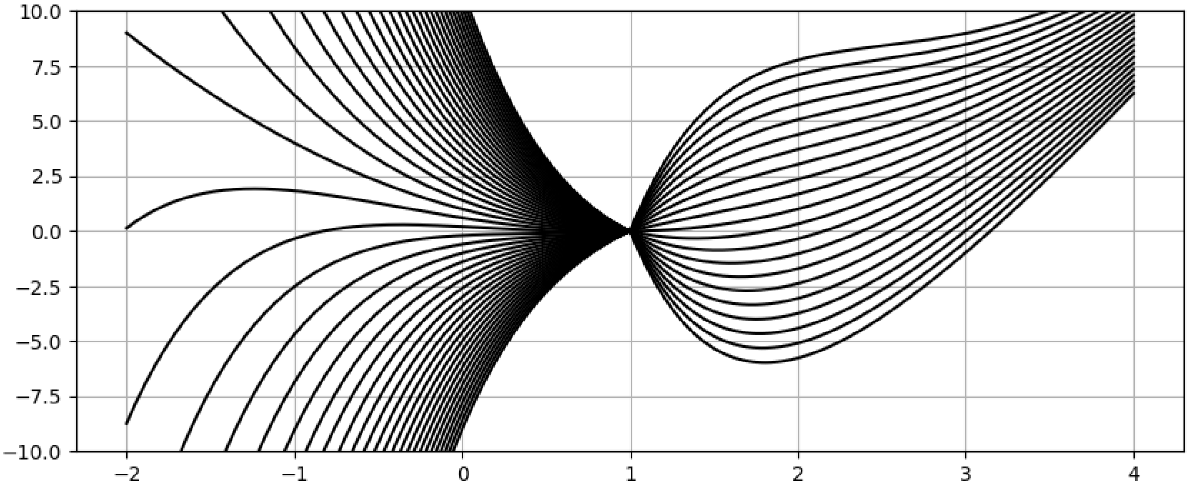
$$g'(x) = \frac{x(x-1)^2}{(x-1)\varphi_0(x)} = xe^x$$

d'où, par exemple,

$$g(x) = (x-1)e^x$$

et donc

$$f_0(x) = (x-1)^2$$



$$(\mathcal{E})\ (x+1)y' - xy + 1 = 0$$

On résout sur $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$.

• Solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : $k\varphi_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \exp\int^x \frac{t}{t+1}\,dt \\
&= \exp\int^x \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \exp\left(x - \ln|x+1|\right) \\
&= \frac{e^x}{|x+1|}
\end{aligned}$$

Quitte à remplacer k par $-k$, on peut prendre $\varphi_0(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

• Fonction f_0 solution particulière de $(\mathcal{E})$: méthode de variation de la constante. On pose $f_0(x) = g(x)\varphi_0(x)$.

$$(x+1)f_0'(x) - xf_0(x) = (x+1)g'(x)\varphi_0(x)$$

et donc

$$g'(x) = -e^{-x}$$

d'où, par exemple,

$$g(x) = e^{-x}$$

et donc

$$f_0(x) = \frac{1}{x+1}$$