

Exercice 9. Soit $(\mathcal{E})$ $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Soit $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^2$. Posons, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = g(\ln |x|)$$

On a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}g'(\ln |x|) \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}g'(\ln |x|) + \frac{1}{x^2}g''(\ln |x|) \end{aligned}$$

De là,

$$ax^2f''(x) + bxf'(x) + cf(x) = ag''(\ln |x|) + (b-a)g'(\ln |x|) + cg(\ln |x|)$$

Lorsque x décrit I , $t = \ln |x|$ décrit $\mathbb{R}$. Ainsi, f est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$(\mathcal{E}') \quad ay'' + (b-a)y' + cy = 0$$

Prenons $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$, de sorte que $(\mathcal{E}')$ $y'' - 2y' + y = 0$. Les solutions de $(\mathcal{E}')$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$g : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^x$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. De là, les solutions de $(\mathcal{E})$ sur I sont les fonctions

$$f : x \mapsto (\alpha \ln |x| + \beta)|x|$$

Quitte à remplacer α et β par leurs opposés, les solutions de $(\mathcal{E})$ sur I sont ainsi les fonctions

$$f : x \mapsto \alpha x \ln |x| + \beta x$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ devant être dérivables en 0, ceci impose $\alpha = 0$. Ce sont les fonctions $f : x \mapsto \beta x$.

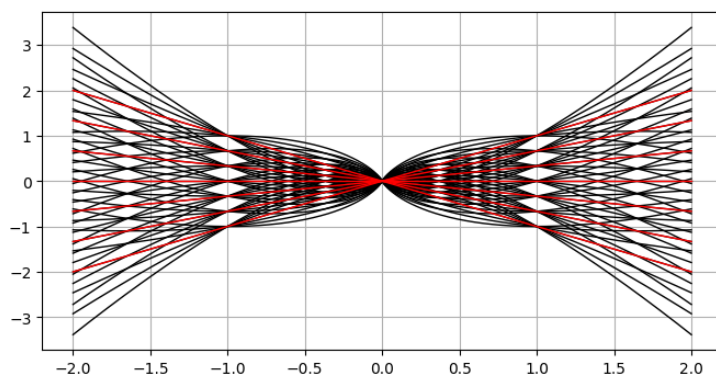


FIGURE 1 – Quelques solutions de $(\mathcal{E})$. En rouge, les solutions sur $\mathbb{R}$.