Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à la fois convexe et concave.

1. On suppose f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est affine.
2. On ne fait aucune hypothèse particulière sur la régularité de f. Que dire de f ?

Exercice 2. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ positives, croissantes, convexes.

1. On suppose f et g deux fois dérivables sur I. Montrer que fg est convexe.
2. On ne fait aucune hypothèse particulière sur la régularité de f et g. Que dire de fg ?
3. Que se passe-t-il si f et g sont décroissantes sur I ?

Exercice 3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ convexe. Soit $\varphi : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) + f(1-x)$. Montrer que φ est décroissante.

Exercice 4.

1. Montrer que $x \mapsto -\ln \ln x$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tous $x, y > 1$,

$$\ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}$$

Exercice 5.

1. Étudier la convexité de $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \ln x$.
2. En déduire que pour tous $x, y, a, b > 0$,

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$$

Exercice 6. Résoudre le système d'équations d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{ch } x + \text{ch } y & = & \frac{35}{12} \\ \text{sh } x + \text{sh } y & = & \frac{25}{12} \end{array} \right.$$

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$2\text{ch } t - 1 = \frac{2\text{ch } 2t + 1}{2\text{ch } t + 1}$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de

$$\prod_{k=0}^{n} (2\text{ch } (2^k x) - 1)$$

Exercice 8. Soit

$$f : x \longmapsto 2 \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

Tracer le graphe de f.

Exercice 9. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin x) - \arccos(\cos x)$.

Exercice 10. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x)$.