Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

1. $f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}$
2. $f(x) = x^2 x^{\frac{1}{3}} + 2\sin x$
3. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$
4. $f(x) = \ln\frac{x+3}{x-3}$
5. $f(x) = \frac{1}{xe^x}$
6. $f(x) = \frac{x-2}{\cos(2x)}$
7. $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$
8. $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$

Exercice 2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\frac{2x^2}{x^4+1}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle ne contenant ni 1 ni -1.
3. Calculer f'.
4. f est-elle dérivable en -1 et 1 ?

Exercice 3. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = e^x \arctan e^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Calculer f'.

Exercice 4. Soient $m, n \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$f(x) = -m\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta} + (m\alpha+n)\arcsin\frac{x-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta}}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Où les théorèmes de cours permettent-ils d'affirmer que f est dérivable ?
3. Calculer la dérivée de f.

Exercice 5. Résoudre :

$$x, y \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \left\{ \begin{array}{rcl} 2\log_x y + 2\log_y x & = & -5 \\ xy & = & e \end{array} \right.$$

Exercice 6. Trouver la limite lorsque $x \to +\infty$, de $\frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$.

Exercice 7. Résoudre : $x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 8. Calculer

$$\text{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \quad \text{Arccos}\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right), \quad \text{Arcsin}\left(\sin\frac{13\pi}{2}\right), \quad \text{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$$

Exercice 9. Calculer $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$, $\sin(\operatorname{Arccos} x)$, $\cos(\operatorname{Arctan} x)$. On précisera à chaque fois les valeurs du réel x pour lesquelles les expressions ont un sens.

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que le réel $\operatorname{Arctan}(e^x) - \operatorname{Arctan}(\operatorname{th} \frac{x}{2})$ ne dépend pas de x. Calculer ce réel.

Exercice 11. Soient a et b deux réels et n un entier naturel. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + kb)$$

et

$$S' = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a + kb)$$

Exercice 12. Déterminer la limite éventuelle lorsque x tend vers $+\infty$ de :

1. $\frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ où $1 < a < b$.
2. $\frac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ où $a > 1$.

Exercice 13. Pour chacune des expressions ci-dessous : dire pour quelles valeurs du réel x l'expression a un sens, et simplifier l'expression.

1. $\operatorname{Argsh} \frac{x^2-1}{2x}$
2. $\operatorname{Arccos}(2x^2 - 1)$
3. $\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Exercice 14. Résoudre :

$$x, y \in \mathbb{R}_+^*, \left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{Argsh} x & = & 2 \operatorname{Argsh} y \\ 3 \ln x & = & 2 \ln y \end{array} \right.$$

Exercice 15. Tracer le graphe de la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arccos} \cos x + \operatorname{Arcsin} \sin x$.