Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. Étudier la continuité de f.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 1$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos x$$

1. Exprimer, pour tout réel x et tout entier naturel n, $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) \sin \frac{x}{2^n} = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \frac{\sin x}{2^n}$$

3. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \neq 0$.
4. Conclure.

Exercice 3.

1. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$(E)\ \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

2. En déduire les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$(E')\ \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x)f(y)$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Montrer que f est continue en 0.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, ayant une limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. Prouver que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique, ayant une limite en $+\infty$. Que dire de f ?

Exercice 7. Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $a < 0$ et $b > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, tendant vers a en $-\infty$ et vers b en $+\infty$. Prouver que f s'annule. (théorème des valeurs intermédiaires « généralisé »).

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $f(x) = x$.

Exercice 9. Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une limite en a et en b, et que ces limites sont égales. Prouver que f n'est pas injective.

Exercice 10. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

1. L'ensemble $\mathcal{L}$ est-il stable pour l'addition ? Pour la multiplication par un réel ? Pour la multiplication des applications ? Pour la composition ?
2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}$, soit $K(f)$ l'ensemble des réels k tels que f soit k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que $K(f)$ possède un plus petit élément. On note $k(f)$ ce réel.
3. Pour $f, g \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, que peut-on dire de $k(f + g)$, de $k(\lambda f)$, de $k(g \circ f)$?

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est eunitnoc en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \varepsilon \implies |f(x) - f(a)| \leq \alpha$$

1. Montrer que toute fonction bornée sur $\mathbb{R}$ est eunitnoc en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f est eunitnoc en un point, elle est eunitnoc en tout point.
3. Montrer que f est eunitnoc si et seulement si elle est bornée sur tout segment.

Exercice 12. Soit S un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : S \longrightarrow S$ continue.

1. Montrer que f admet un point fixe.
2. Ce résultat reste-t-il valable si S est un intervalle ?

Exercice 13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, ne s'annulant pas, et telles que

$$\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)|$$

Montrer que $g = f$ ou $g = -f$.

Exercice 14.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soient $a, b \in I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que
$$f(c) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$
On pourra considérer la fonction $g : x \longmapsto 2f(x) - f(a) - f(b)$.
2. Plus généralement, soient p, q deux réels positifs. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que
$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$$
3. Encore plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in I$, soient $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que
$$\sum_{k=1}^{n} t_k f(a_k) = f(c) \sum_{k=1}^{n} t_k$$