Exercice 1. Soit G un groupe. Montrer que toute intersection de sous-groupes de G est encore un sous-groupe de G.

Exercice 2. Soit G un groupe. Soient A et B deux sous-groupes de G. Montrer que $A \cup B$ est un sous-groupe de G si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Exercice 3. Soient $(G, \times)$ et $(H, \star)$ deux groupes. On définit une opération $\otimes$ sur $G \times H$ en posant

$$(x, y) \otimes (x', y') = (x \times x', y \star y')$$

Montrer que, muni de cette opération, $G \times H$ est un groupe.

Exercice 4. Soit G un groupe dans lequel tout élément est égal à son inverse. Montrer que G est abélien.

Exercice 5. Soit $\star$ l'opération définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \star y = x + y + xy$$

Soit $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 6. On pose, pour x, $y \in \mathbb{R}$,

$$x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 7. Isomorphes ou pas ?

1. $(\mathbb{R}^*, \times)$ est-il isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$?
2. $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est-il isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$?
3. $(\mathbb{Q}, +)$ est-il isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$?
4. Prouver que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ (cf exercice 3).
5. $(\mathbb{R}, +)$ est-il isomorphe à $(\mathbb{C}, +)$?

Exercice 8. On note $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\omega\}$, où ω est un symbole sans signification particulière. Soient f et $g : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$ définies par

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$ et $f(\omega) = \omega$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{1}{x}$, $g(0) = \omega$ et $g(\omega) = 0$.

Déterminer le plus petit sous-groupe de $\mathfrak{S}(\widehat{\mathbb{R}})$ contenant f et g.

Exercice 9. Soit $(G, +)$ un groupe abélien de neutre 0. G_1 et G_2 étant deux sous-groupes de G, on pose

$$G_1 + G_2 = \{x_1 + x_2, x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\}$$

1. Montrer que $G_1 + G_2$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que si $G_1 \cap G_2 = \{0\}$, alors les groupes $G_1 + G_2$ et $G_1 \times G_2$ sont isomorphes.

Exercice 10. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$.

1. Montrer que $G_+^* = \{x \in G, x > 0\}$ possède une borne inférieure. On note celle-ci α.
2. On suppose $\alpha = 0$. Prouver que G est dense dans $\mathbb{R}$ (utiliser la proriété d'Archimède).
3. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha \in G$ (on pourra raisonner par l'absurde), puis prouver que $G = \alpha\mathbb{Z}$ (adapter la démonstration faite en cours sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$).

Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ se divisent ainsi en deux familles : les sous-groupes de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \geq 0$ sont dits discrets. Par exemple, $\mathbb{Z}$ fait partie de cette famille de sous-groupes. Les sous-groupes qui ne font pas partie de la première familles sont denses dans $\mathbb{R}$. Un exemple en est $\mathbb{Q}$.

Exercice 11. Soient α, β deux réels strictement positifs. Soit $G = \{m\alpha + n\beta, m, n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$ si est seulement si le quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ est irrationnel.

Exercice 12. Soit c un réel strictement positif. Soit $E =]-c, c[$. Pour $x, y \in E$, on pose

$$x \star y = c^2 \frac{x+y}{xy+c^2}$$

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne sur E.
2. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 13. Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et tout $b \in \mathbb{C}$, on définit $f_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f_{a,b}(z) = az + b$$

Soit

$$\mathcal{S} = \{f_{a,b}, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$$

Montrer que $(\mathcal{S}, \circ)$ est un groupe. Ce groupe est-il abélien ?

Exercice 14. Les anneaux ci-dessous sont-ils isomorphes ?

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Soit

$$\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{n}, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps.

Exercice 16. Soit $\mathbb{A}$ un anneau. On suppose que l'application $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ définie par $f(x) = x^2$ est un endomorphisme du *groupe* $(\mathbb{A}, +)$.

1. Prouver que $\forall x, y \in \mathbb{A}, xy = -yx$ (considérer $(x+y)^2$).
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{A}, x = -x$ et en déduire que l'anneau $\mathbb{A}$ est commutatif.
3. Montrer que f est un endomorphisme de l'anneau $\mathbb{A}$.

Exercice 17. Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif. On appelle *élément nilpotent* de $\mathbb{A}$ tout $x \in \mathbb{A}$ vérifiant

$$\exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0$$

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathbb{A}$.

1. Montrer que $\mathcal{N}$ est stable pour la multiplication.
2. Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par passage à l'opposé.
3. Montrer que $\mathcal{N}$ est stable pour l'addition.
4. $\mathcal{N}$ est-il un sous-anneau de $\mathbb{A}$?

Exercice 18. Soit $\mathbb{A}$ un sous-anneau de $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{A}_+^* = \mathbb{A} \cap \mathbb{R}_+^*$.

1. Prouver l'existence de $\alpha = \inf \mathbb{A}_+^*$.
2. Montrer que $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$.
3. On suppose $\alpha = 1$. Montrer que $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$.
4. On suppose $\alpha = 0$. Montrer que $\mathbb{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$.