Exercice 1. La suite u est une suite qui tend vers 0. Calculer la limite éventuelle des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $\frac{\ln(1+2\tan^2 u_n)}{\sin^2 u_n}$
2. $\frac{\ln\cos(2u_n)}{e^{3u_n^2}-1}$
3. $\frac{(\sqrt[5]{1+3u_n}-1)(\sqrt[3]{1+5u_n}-1)}{u_n^2+2u_n^3}$

Exercice 2. Donner un équivalent simple des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $n(\sqrt[n]{5}-1)$
2. $(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3})^n$
3. $\log_a(a+\frac{1}{n})-\log_{a+\frac{1}{n}}(a)$ $(a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\})$.
4. $a^{a+\frac{1}{n}}-(a+\frac{1}{n})^a$ $(a>0)$.
5. $\left(\frac{\cos(\alpha+\frac{\beta}{n})}{\cos\alpha}\right)^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\cos\alpha\neq 0$.

Exercice 3.

1. La suite u tend vers 0. Calculer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$(\cos u_n)^{\frac{1}{\sin^2 u_n}}$$
2. La suite u tend vers $\frac{\pi}{4}$. Calculer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$(\tan u_n)^{\text{cotan}(4u_n)}$$
3. La suite u tend vers $a\in\mathbb{R}^*$. Calculer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$\left(2-\frac{u_n}{a}\right)^{\tan\frac{\pi u_n}{2a}}$$
4. La suite u tend vers $+\infty$. Calculer la limite éventuelle de la suite de terme général
$$\left(\frac{\ln u_n}{\ln(u_n+1)}\right)^{u_n\ln u_n}$$

Exercice 4. On considère la suite u définie par récurrence par $u_0\in\,]0,1[$ et
$$\forall n\geq 0, u_{n+1}=u_n-u_n^2$$

1. Montrer que cette suite converge vers 0.
2. Trouver un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha$ tende vers une limite finie non nulle.
3. Utiliser le théorème de Cesàro pour en déduire un équivalent simple de u_n.