

Dans chacun des exercices ci-dessous, f est une fonction à valeurs réelles et a est un nombre réel. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Dans chacun des exercices, on dessinera la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

Exercice 1. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2(x - x^2)$$

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{1}{2}$. Déterminer v_{n+1} en fonction de v_n .
2. En déduire v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite éventuelle de u_n lorsque n tend vers l'infini. On discutera selon les valeurs de a .

Exercice 2. On suppose $a \in [0, 1]$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin x$$

1. Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
2. Montrer que si u converge, sa limite est 0.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
4. Montrer que u est décroissante. En déduire que u converge.
5. On suppose maintenant que $a \in \mathbb{R}$. Comment peut-on se ramener à ce qui précède?

Exercice 3. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $\cos \ell = \ell$. Montrer de plus que $0 < \ell < 1$.
3. Montrer que si la suite u converge, sa limite est ℓ .
4. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\cos x - \cos y| \leq \left| \sin \frac{x+y}{2} \right| |x - y|$$

5. En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leq K |u_n - \ell|$$

où $K = \sin 1$.

6. Montrer que la suite u converge vers ℓ .