Exercice 1. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $B \subset A$. Montrer que
$$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$$

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Soit
$$A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$$
Prouver que $A + B$ admet une borne supérieure, et que
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Exercice 3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée. Soit
$$B = \{|x - y|, x \in A, y \in A\}$$

1. Montrer que B a un plus petit élément, et que $\min B = 0$.
2. Montrer que B a une borne supérieure, et que $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice 4. Soit
$$E = \left\{\frac{p}{2^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$
Montrer que E est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$
En déduire la partie entière de
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercice 6. Montrer que

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, 1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

Exercice 7. Soit
$$A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
Calculer, s'ils existent, $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

Exercice 9. Soient x et y deux réels. Comparer $\lfloor x - y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$.

Exercice 10. Pour x réel on appelle arrondi de x le réel $\alpha(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$. On pose également $\delta(x) = |x - \alpha(x)|$.

1. Tracer le graphe de la fonction α.
2. Prouver que la fonction δ est 1-périodique. Tracer son graphe.
3. À l'aide d'un ordinateur, tracer le graphe de la fonction

$$\varphi_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta(2^k x)}{2^k}$$

pour $n = 2$ et $n = 10$.

Lorsque n tend vers l'infini, les fonctions φ_n tendent, d'une certaine manière, vers une fonction φ qui s'appelle la fonction de Takagi. On peut prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point.

Exercice 11. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$(*)\ \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(|x|)$.

1. Montrer que f est croissante.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x + y| \leq |x|$. Vérifier que $g(x + y) \leq g(x)$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x + y| \leq |y|$. Vérifier que $g(x + y) \leq g(y)$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x + y| > |x|$ et $|x + y| > |y|$. Montrer que $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$.
5. Montrer que pour tous réels x et y, $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$.

Exercice 13. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ croissante. Soit

$$A = \{x \in [0, 1], x \leq f(x)\}$$

1. Montrer que A admet une borne supérieure a, et que $a \in [0, 1]$.
2. Montrer que $a \in A$.
3. Montrer que pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$.
4. En déduire que $f(a) = a$.
5. Montrer que a est le plus grand $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.