

Exercice 1. Déterminer $\left\{ z \in \mathbb{C}, \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan d'affixes $1, z^2$ et z^3 soient alignés.

Exercice 3. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan d'affixes $1, z$ et z^4 soient alignés.

Exercice 4. Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que le triangle de sommets d'affixes $1, z$ et z^2 soit équilatéral.

Exercice 5. Déterminer module et argument de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{10}$

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1 et d'argument $\theta \in]-\pi, \pi]$. Déterminer module et argument de $1+z$, de $1-z$, de $1+z+z^2$. Les arguments donnés devront appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Exercice 7. Soient n un entier naturel non nul et ω une racine n ième de 1. Calculer :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \omega^k$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \omega^k$

Exercice 8. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_0 = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}$$

$$S_1 = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1}$$

$$S_2 = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}$$

Calculer S_0 .

Indication : considérer pour cela $(1+1)^n$, $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ où $1, j$ et j^2 sont les racines cubiques de 1.

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \alpha \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$S' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k \alpha} \text{ et } S'' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k\alpha)}{\cos^k \alpha}$$

Exercice 10. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta) \text{ et } S'' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta)$$

Exercice 11. Déterminer les primitives de $x \mapsto \sin^6 x$.

Exercice 12. Trouver les racines carrées de $10 - 4i\sqrt{6}$.

Exercice 13. Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$.
2. $z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.
3. $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Exercice 14. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) \quad \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n = a$$

1. On suppose que (E) a une racine réelle. Montrer que $|a| = 1$.
2. On suppose que $a = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les racines de l'équation. On constatera que ces racines sont toutes réelles.

Exercice 15. Trouver tous les nombres complexes z vérifiant

$$(E) \quad \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$$

Exercice 16. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\bar{a}b \neq 1$. On pose

$$c = \frac{a-b}{1-\bar{a}b}$$

Montrer que $|c| = 1$ si et seulement si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.

Exercice 17. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta \neq 0$. Exprimer $\tan 5\theta$ en fonction de $\tan \theta$.

Exercice 18. Déterminer l'ensemble

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C}, \frac{z^2}{z+i} \in i\mathbb{R} \right\}$$

Exercice 19. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) \quad z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0$$

1. Trouver les imaginaires purs qui sont solutions de (E) .
2. Trouver toutes les solutions de (E) .

Exercice 20. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) \quad z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$$

1. Trouver les imaginaires purs qui sont solutions de (E) .
2. Trouver les réels qui sont solutions de (E) .
3. Trouver toutes les solutions de (E) .