Exercice 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$41 \mid 5 \times 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété « $9 \mid 10^n + 1$ ».

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1)$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \neg P(n)$.

Exercice 3.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} k.k!$$

Exercice 4. Calculer pour tout $n \geq 2$ les produits

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \text{ et } \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

En déduire

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 5. Calculer, pour tout entier $n \geq 1$, la somme des n premiers entiers impairs.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Déterminer, pour tout entier n, u_n en fonction de n.

Exercice 7. Calculer, pour tout $n \geq 1$,

$$S' = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \text{ et } S'' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

On pourra considérer les quantités $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = (1+x)^n$.

1. Utiliser judicieusement f pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Calculer de même $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.
3. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 9. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante d'entiers naturels. Montrer que (u_n) est stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

On pourra développer de deux façons différentes la quantité $(1+x)^{2n}$ et regarder le terme de degré n dans l'égalité obtenue.

Exercice 12. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$,

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$$

Exercice 13. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \leq n$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on a

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$$

2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$