Ce sujet comporte un exercice et un problème indépendants. Les appareils électroniques sont interdits.

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

Pour quelles valeurs de a et b la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est-elle convergente ? Calculer alors la somme de la série.

Problème

Pour toute variable aléatoire réelle X, on note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ la variance de X.

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles *indépendantes* définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

- $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$.
- $\mathbb{P}(X_k = -1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Enfin, on note $T_n = |S_n|$.

-I-

1. (a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathbb{V}(X_k)$.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

2. (a) En utilisant le fait que $\mathbb{V}(T_n) \geq 0$, montrer que

   $$\mathbb{E}(T_n) \leq \sqrt{n}$$

   (b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

   $$\mathbb{P}(T_n \geq a) \leq \frac{n}{a^2}$$

   (c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\sqrt{n} = o_{+\infty}(u_n)$. Montrer que

   $$\mathbb{P}(T_n < u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

-II-

On se propose dans cette partie de déterminer l'espérance de T_n.

1. Montrer que $T_n(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$. En déduire que

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k)$$

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\{S_{n+1} = k\} = \{S_n = k-1, X_{n+1} = 1\} \cup \{S_n = k+1, X_{n+1} = -1\}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n = k+1)$$

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\{T_n = k\} = \{S_n = k\} \cup \{S_n = -k\}$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_n = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_n = k+1)$$

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(T_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_n = 2)$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + \mathbb{P}(T_n = 0)$$

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(T_{2n+2}) = \mathbb{E}(T_{2n+1})$.
7. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(T_{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(T_{2n+2}) = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

8. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $\mathbb{E}(T_n) \sim c\sqrt{n}$, où c est un réel dont on déterminera la valeur.
9. Pour finir, que vaut $\mathbb{V}(T_n)$?